

SONLU ELEMANLARIN AĞ YÖNTEMİ YAKLAŞIMINA DAYALI KENAR CİVARLARINDAKİ GERİLİM DAĞILIMLARININ TEKİLLİKLERİ

Gökhan COŞKUN,
Sakarya Üniversitesi,
Makina Mühendisliği Bölümü,
Esentepe Kampüsü, Sakarya
gcoskun@sakarya.edu.tr

Hakan S. SOYHAN*
Doç. Dr., Sakarya Üniversitesi,
Makina Mühendisliği Bölümü,
Esentepe Kampüsü, Sakarya
hsoyhan@sakarya.edu.tr

ÖZET

Bu çalışmada sonlu elemanların ağ yöntemi yaklaşımına dayalı, içbükey köşelerdeki gerilim tekilliği mertebeleri üzerine çalışılmış ve bu yöntem ile elde edilen sonuçlar analitik yöntemiyle bulunan sonuçlarla karşılaştırılmıştır. Sonlu elemanlar yöntemini temel alarak çalışan bir bilgisayar programı olan ANSYS, çeşitli ağ yöntemleri uygulanarak sayısal sonuçlar elde edebilmek için kullanılmıştır. Bu ağ yöntemleri; düzenli ağ (mapped mesh), yarı düzenli ağ (irregular mesh) ve düzensiz ağ (free mesh) olarak sıralanabilir. Bu farklı ağ yöntemleriyle elde edilen sonuçların gerilim değerleri, tekil noktaya olan uzaklıklarıyla birlikte iki kat logaritmik çizgiler ile çizilmiş ve bu şekilde düzenli tekilliği eğim çizgileriyle tespit etmek mümkün olmuştur.

Anahtar Kelimeler: Gerilim tekilliği, iki boyutlu içbükey köşe, eş materyal, sonlu elemanlar yöntemi (FEM)

Mesh Dependence of Finite Element Predictions For Stress Distributions in the Vicinity of Edge Singularities

ABSTRACT

In this report the mesh dependence of Finite Element (FE) predictions for the order of stress singularities in reentrant corners are studied and compared to analytical reference solutions.

The FE program, ANSYS, is used for obtaining the numerical solutions using different meshing strategies, viz regular (mapped) meshes, irregular (semi free) meshes and automatically generated (free) meshes. Results obtained with the different meshes are presented in the form of double logarithmic plots of stress vs. distance from the singular point, which allow evaluating the orders of the singularities from the slopes of the curves. Results obtained from FE analysis are compared with the analytical reference solutions in order to assess the suitability of the meshes.

Keywords : Stress singularity, two-dimensional joints, similar materials, FEM

* İletişim yazarı

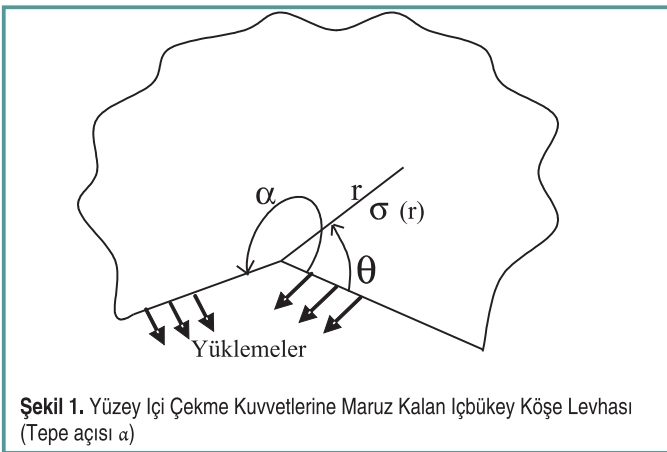
Geliş tarihi : 27.01.2011
Kabul tarihi : 25.03.2011

GİRİŞ

Elastikite teorisine göre düşük değerli tekillikler Şekil 1’de görüldüğü üzere düzlemsel homojen plakaların içbükey köşelerinin uç noktalarında ortaya çıkabilir. İyi bilinen $r^{-1/2}$ çatlak uç bölgesi tekilliği, 360° tepe açısına ait olan içbükey köşe tekilliklerinin özel bir biçimi olarak gösterilebilir.

Düzlemsel oluşumların gerilim bölgeleri üzerine çalışılırken sonlu elemanlar yöntemi kullanılır ve bu yöntem bu tip tekilliklerin etkilerinin anlaşılmasına imkân verir. Açık biçimde, standart üçgensel düzlem veya dörtgensel sonlu elemanlar, serendipity dördlüsü (serendipity quads) gibi, gerilim bölgelerinden farklı uzaklıklardaki tekil noktalara yaklaşım yapabilirken kendi kendine tekilliklerdeki sonsuz gerilimi ortaya çıkartamaz. $r^{-1/2}$ tepe bölgesi çatlak tekilliklerinin özel durumu için, 8-düğüm noktalı serendipity elementi 6-düğüm noktalı üçgensel element “çeyrek nokta elementleri” haline, önceden kanıtladığı üzere uygun stres bölgeleri sağlandığında çökebilir [1]. Buna ek olarak, analist tarafından tekil gerilim bölgelerindeki düzenli tekillikleri artırıcı özellikte özel elementler geliştirilebilir. Fakat bu özel elementler, genel amaçlı olarak kullanılan ticari sonlu eleman paketlerinde bulunmazlar; bu yüzden de eksik bilgi verebilen standart düzlemsel elementler kullanılmıştır.

Bu çalışmada: Hedeflenen, kendine özgün çeşitli ağ yöntemleri kullanarak düzlemsel sonlu elemanlarla içbükey köşe bölgelerinin tepe noktalarında düzenli tekilliklerin hangi düzeyde ve ne kadar yakınsamayla elde edilebileceği hakkında bilgi sağlamak amacıyla analiz yapılmaktadır. Analitik referans sonuçları düzlem için üç farklı sınır koşullarına göre belirlenen, içbükey köşe plakanın iç sınır bölgelerinin uç kısımlarında oluşan gerilim tekillikleri için Williams’ın çalışmasından yararlanılmıştır [1]. Bu sınır koşulları; a) iki tarafından sabitlenmiş, b) bir tarafı sabit diğer tarafı serbest, c) iki tarafı da serbest olarak sıralanabilir. Bu çalışmada düzenli tekillikler sınırlı olarak $180^\circ \leq \alpha \leq 360^\circ$ arasındaki tepe açıları



Şekil 1. Yüzey İçi Çekme Kuvvetlerine Maruz Kalan İçbükey Köşe Levhası (Tepe açısı α)

“ α ” değerleri için iki tarafı serbest olan sınır koşulundan elde edilmiştir. 180° ’den küçük tepe açıları için sonsuz gerilim değerleri sadece bir tarafı sabit diğer tarafı serbest sınır koşulunda ortaya çıkmaktadır. Tepe açısı 180° ve 360° arasındaki üç sınır koşulu içinde gerilim tekilliği oluşur [2].

Şekil 1’de tipik bir içbükey köşe şekli sembolize edilmiştir. Burada α tepe açısını, r ise tekil noktadan uzaklığı sembolize eder.

Bu çalışmanın ilk bölümünde iki tarafı serbest olan kenar sınır koşulları için, içbükey köşelerin tepe noktalarındaki düzenli gerilim tekillikleri; Williams yaklaşımı olan ve eigen probleminin çözümünü temel alan bir analitik çözüm yöntemine göre değerlendirilmiştir.

İkinci bölümde stres parametreleri, aynı kurgu için bir sonlu elemanlar programı olan ve stres çözümünü her birleşme noktası ve her düğüm noktası ile ağın kalitesine göre yaklaşım metodunun doğruluğuna dayanarak uygulayan ANSYS programında çözülmüştür. ANSYS önışlemcisi çeşitli ağ stratejilerini destekler, bu çalışmada üç çeşit ağ yöntemi uygulanmıştır bunlar; düzenli ağ (mapped mesh), yarı düzenli ağ (semi-free mesh) ve düzensiz ağ (free mesh) olarak sıralanabilir.

Gerilim değerleri analitik yöntemle ve sonlu elemanlar yaklaşımıyla hesaplanmış, bulunan değerler birlikte aynı grafik üzerinde birbirleriyle kıyaslamaya müsaade edebilecek şekilde tekil noktaya uzaklıkları fonksiyon alınarak çift kat logaritmik eğrilerle çizilmiştir. Sonlu elemanlar modeli incelenerek ortaya çıkartılan düzenli tekillikler ve analitik referans çözümü aynı grafik üzerinde gerilim ve uzaklık eğrileri çizilerek karşılaştırılmıştır. Bu yöntemle elde edilen içbükey köşelerdeki gerilim tekillikleri, kullanılan ağ yöntemlerinin uygunluğunu belirlemek amacıyla analitik çözüm ile karşılaştırılmıştır.

Gerilim tekilliklerinin etkileri endüstriyel uygulamalarda sıkça görülebilir. Örnek olarak nokta kaynağı otomotiv endüstrisinde olduğu gibi çelik sac kaynağı uygulamalarında sıkça kullanılır. Nokta kaynağı ile yapılan çelik sac ve alüminyum kaynaklarındaki yorulma gerilimleri kaynak bölgesinde sıkça sorun çıkartabilir. Kaynak bölgeleri çok iyi özellikte ve iyi tanımlanmış geometride olmalarına rağmen nokta kaynağında ortaya çıkan birçok sorunun sorumluluğunu taşırlar. İki tabaka üst üste getirilip birbiriyle külçe kenar bölgesi boyunca birleştirildiği zaman bu durum gerilim tekilliğine sebep olur [3].

ÇÖZÜMLEME METODU

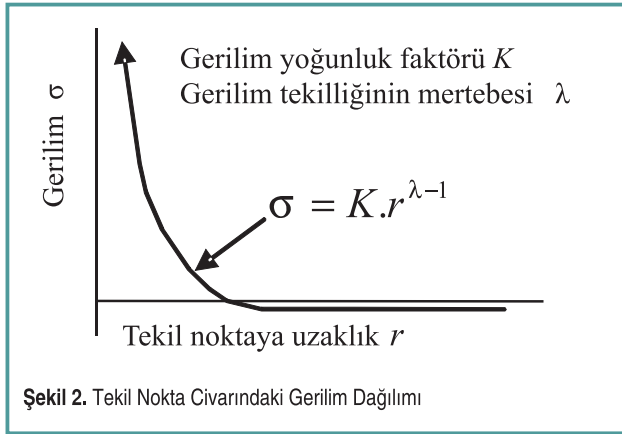
Gerilim Tekilliği Parametrelerinin Analizi

İçbükey köşelerdeki gerilim bölgeleri ve çatlak tepesi tekil davranış gösterirler (Şekil 2). Tekil noktanın civarındaki gerilme bileşenlerinin dağılımı K ve λ bileşenleri açısından aşağıdaki gibi ifade edilebilir:

$$\sigma(r) = K \cdot r^{\lambda-1} \quad (1)$$

Denklem 1'de σ gerilim parametresi (Pa), r tekil noktaya uzaklık (m), K gerilim yoğunluk faktörü ($\text{Pa m}^{1-\lambda}$), λ gerilim tekilliğinin mertebesidir [4].

Gerilim Tekilliği Mertebesinin Değerlendirilmesi



Şekil 2. Tekil Nokta Civarındaki Gerilim Dağılımı

180° ve 360° arasında içbükey köşede verilen tekillik mertebesi eigen probleminin en düşük eigen değerinin “ λ ” gerçek kısmı tarafından belirlenir. Williams çalışmasında [2] eigen problemi, λ değerini veya değerlerini α 'nın fonksiyonu olarak bulabilmek için şu şekilde vermiştir;

$$\sin z = C_1 z \quad (2)$$

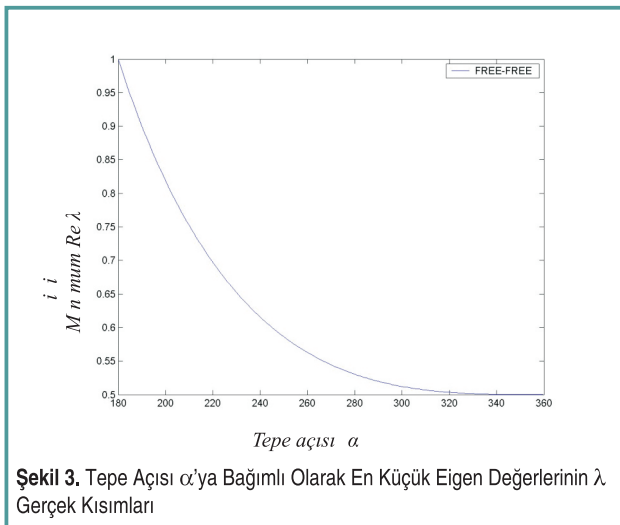
Buradan

$$z = \lambda \alpha \quad \text{ve} \quad C_1 = \pm (\sin \alpha) / \alpha \quad (3)$$

Bu iki eşitliği birbiri içinde kullanırsak

$$\sin(\lambda \alpha) = \pm \lambda \sin \alpha \quad (4)$$

Denklem 4 lineer olmayan bir eşitlik olduğu için Newton-Raphson gibi özel bir matematiksel metotla çözülmelidir [5].



Şekil 3. Tepe Açısı α 'ya Bağımlı Olarak En Küçük Eigen Değerlerinin λ Gerçek Kısımları

Bu çalışmada istenen çözüm Matlab programı kullanılarak özel bir kodla elde edilmiştir [6]. Tablo 1'de bu yolla elde edilen 180° ve 360° arasındaki her açı için en düşük eigen değerlerinin λ gerçek kısımları listelenmiştir. Ayrıca bu değerler Şekil 3'te görülebileceği üzere grafik olarak çizilmiştir.

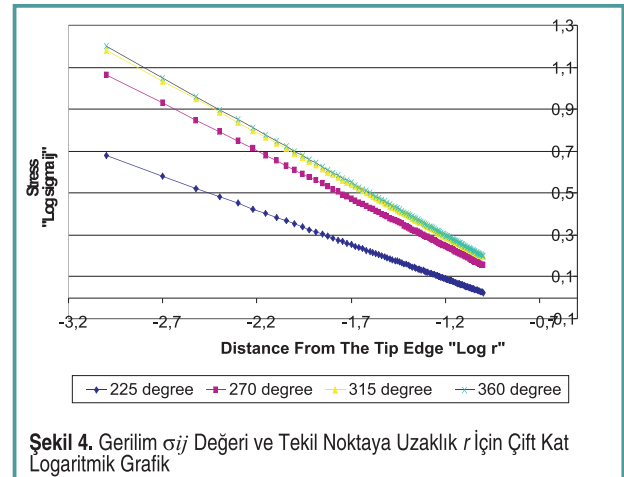
$\alpha > 180^\circ$ için λ birden küçük olur ve tekillik ortaya çıkar ve $\alpha = 360^\circ$ için tepe noktasının iyi bilinen $1/\sqrt{r}$ tekilliği elde edilir. Şu bilinmelidir ki bu çalışmada gerilim yoğunluk faktörü olan K 'yi elde etmeği amaçlamıyoruz.

Denklem 1'den aşağıdaki eşitliği elde edebiliriz.

$$\log \sigma = \log K + (\lambda - 1) \cdot \log r \quad (5)$$

Bu çalışmada σ değerleri, yarıçap değerleri 0,001 ve 0,1 arasında, 225 ve 315 tepe açıları için elde edilmiştir. Gerilim yoğunluk faktörü de sembolik olarak 0,5 alınmıştır.

Şekil 4 σ ile r 'nin $K=0,5$ değeri için log-log diyagramında 4 farklı açı değeri için analitik referans çözümünü göstermektedir.



Şekil 4. Gerilim σ_{ij} Değeri ve Tekil Noktaya Uzaklık r İçin Çift Kat Logaritmik Grafik

Gerilim Yoğunluk Faktörü K

Gerilim yoğunluk faktörü K çatlak mekaniğinde küçük yüklemeler veya kalıcı gerilmeler yüzünden oluşan tepe noktalarındaki çatlakları, gerilim durumuna (“gerilim yoğunluğu”) göre değer vermek için kullanılan birimsiz bir büyüklüktür. Bu gerilim hali kritik duruma geldiğinde küçük çatlak büyümeye (“genişlemeye”) ve malzemenin zayıf düşmesine sebep olur. Malzemenin bozulmasına sebep olan bu yüklemeye kırılma dayanımı adı verilir. Katı maddelerde iç ve dış yüzeylerdeki küçük çatlaklar çatlak bölgesinde büyük gerilme değerleri oluşturur. Deneysel olarak bulunan değerlerden 10 ile 100 kat daha azdır bu yüzden teorik dayanım değerleri düşürülür [7, 8].

Sonlu Elemanlar Çözümü

Sonlu Elemanlar Yöntemi

Uzay zaman süreklisi sonsuz sayıda serbestlik derecesine

sahiptir; oysa ayrıklaştırılmış sayısal metotlar sonlu sayıda serbestlik derecesine sahiptirler. Ayrıca bu gibi metotlar diferansiyel denklemleri, uzay-zaman ifadesinde dijital bilgisayarlarda çözmeye çok uygun olan sayısal ifadelere dönüştürürler.

Bu çalışmada en önemli ayrıklaştırma metodu olan sonlu elemanlar yöntemi kullanılmıştır. Bu yöntem sonlu eleman olarak bilinen, hesaplama kümesini çözüme yakın bölgede birçok küçük kümelere bölen ve çözümü basit şekil fonksiyonları vasıtasıyla yaklaşık olarak elde eden bir yöntemdir [9].

ANSYS Girdileri

Bu çalışmada tepe açıları olan 225 ve 315 dereceler için yaklaşık gerilim tekilliği parametreleri ANSYS [10] programı yardımıyla çözülmüştür. Analiz çalışmasında ilk adım olarak ANSYS' de analiz tipi "structural" seçilmiştir. Sonra element tipi "solid 8 node 82" yani 8 node isoparametrik düzlemsel uzay-zamanda serendipity tipi element kullanılmıştır. Element davranışı olarak "plane strs w/thk" seçilmiştir, yani yüzey gerilim kinematiki kullanılan yüzeylere uygun olarak belirlenmiştir. Plakanın kalınlığı 2 mm olarak girilmiştir. Malzeme "structural, linear, elastic and isotropic" olarak seçilmiştir. Poisson oranı "ν" 0,3 olarak kullanılmıştır ve elastik modül, E 210000 MPa, her element için kullanılmıştır. Şu bilinmelidir ki poisson oranı ve elastik modülün gerilim tekilliği mertebesi λ üzerinde etkisi yoktur. Bu girdilerden sonra model geometri, ANSYS girdilerinde modeling section kullanılarak çizilmiştir. Üç farklı ağ yöntemi stratejisi ile 315° ve 225° tepe açılarına ait modeller oluşturulmuştur.

"Mapped mesh" çok düzenli ağ sistemine yaklaşım gösterir, "semi free mesh" daha az düzenli ağ sistemine yaklaşım gösterir, "free mesh" ise ANSYS'in kendi kenedine oluşturduğu ağ sistemidir ve daha çok düzensiz ağ sistemine yaklaşım gösterir. Ağ sistemi modellendikten sonra yatay serbestlik derecesi simetri eksenini boyunca sabitlenmiştir ve düşük seviyeli düğüm noktaları içeren düşey serbestlik derecesi de sabitlenmiştir. Son olarak dağınık üniform gerilme yüklemeleri modelin iki yüzünde de uygulanmıştır.

Sonlu elemanlar çözümü elde edildiği zaman son adım olarak gerilim bileşenleri σ_{xx} , σ_{yy} ve von mises olarak bilinen σ_{VM} , düğüm noktalarından oluşan tekil doğruyu da üzerinde barındıran düz bir çizgi üzerinden değerlendirilmiştir.

Von Misses eşdeğer gerilim üzerine kısa bir not:

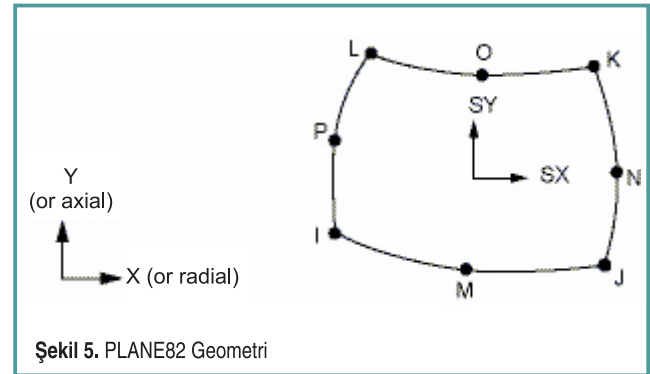
Bir model sadece gerilim ve zorlanma yönünde fonksiyonelse (tek eksenli gerilim ve zorlanma durumu) karşılaştırmalarla kabul edilebilir değerler doğrudur. Fakat birden fazla gerilim ve zorlanma bileşenleri aktifse (çok eksenli gerilim ve zorlanma durumu), bileşenler gerilim ve zorlanma ölçülerinin birlikte kombine olmuş hali karşılaştırma için kabul edilebilir. Metal malzemeler için en önemli stres eşitliği olan von mises şu şekilde bulunur:

$$\sigma_{VM} = \left(\frac{1}{2} \left[(\sigma_{xx} - \sigma_{yy})^2 + (\sigma_{yy} - \sigma_{zz})^2 + (\sigma_{zz} - \sigma_{xx})^2 + 6(\sigma_{xy}^2 + \sigma_{yz}^2 + \sigma_{xz}^2) \right] \right)^{1/2} \quad (6)$$

ANSYS Elementi Olan PLANE82'nin Tanımlaması

Sekiz düğüm noktalı PLANE82 elementi dört düğüm noktalı iki boyutlu element olan PLANE42 elementinin daha yüksek mertebeli sürümü olarak görülebilir. Bu element karma (quadrilateral-triangular) otomatik ağ sistemleri için daha kesin sonuçlar sağlar. Ayrıca en az doğruluk kayıplarıyla modelin sınırlarını daha uygun kavisler yaparak düzensiz şekillere daha fazla tolerans gösterir.

Sekiz düğüm noktalı element I, J, K, L, M, N, O, P (Şekil 5) gibi sekiz düğüm noktası ile ifade edilir ve her düğüm noktası iki tane rotasyon yapmadan düzenli yer değiştirmeyi sağlayan serbestlik derecesine sahiptir. Köşe düğüm noktaları I, J, K, L ve orta noktalarındaki düğüm noktaları M, N, O, P 'dir. Sekiz düğüm noktalı elementin kullanım yerleri, düzlemsel gerilme ve zorlama modelleri, ince plakalar ve kabuk bükümleridir. Bu element, yüzey elementi veya axisymmetric element olarak kullanılabilir. Elementin özellikleri yoğunluk sürün, şişme, gerilim dengelemesi, geniş saptırma ve geniş gerilme kapasitesi olarak sıralanabilir. Ayrıca çeşitli yazdırma opsiyonları da mevcuttur [10].



Şekil 5. PLANE82 Geometri

SONUÇLAR VE KIYASLAMALAR

315 Derece Tepe Açısı İçin Sonuçlar

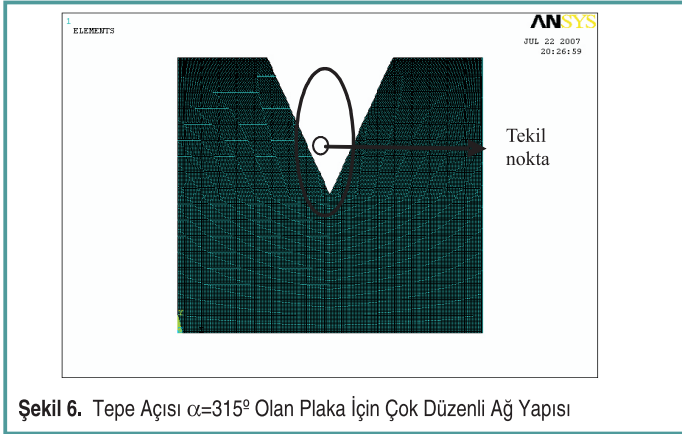
315 Derece – Çok Düzenli Ağ (Mapped Mesh)

Şekil 6 tepe açısı 315° olan plaka için çok düzenli ağ yapısını temsil etmektedir. Elementlerin ölçüleri bütün model boyunca sabittir. Bu mesh 32.021 düğüm noktası ve 10.500 element içerir. Şekli 7'de tekillik bölgesini içeren ağ bölgesi daha yakından görülmektedir.

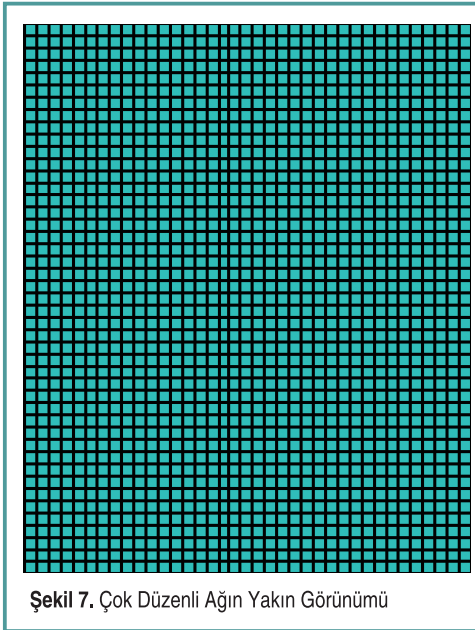
Aşağıda gerilim bileşenlerinin sonlu elemanlar yöntemiyle elde edilen sonuçları ve tekil nokta yakınındaki eşdeğer gerilim eşitlikleri $\alpha=315^\circ$ ve çok düzenli ağ için verilmiştir.

Sonuçların grafikleri

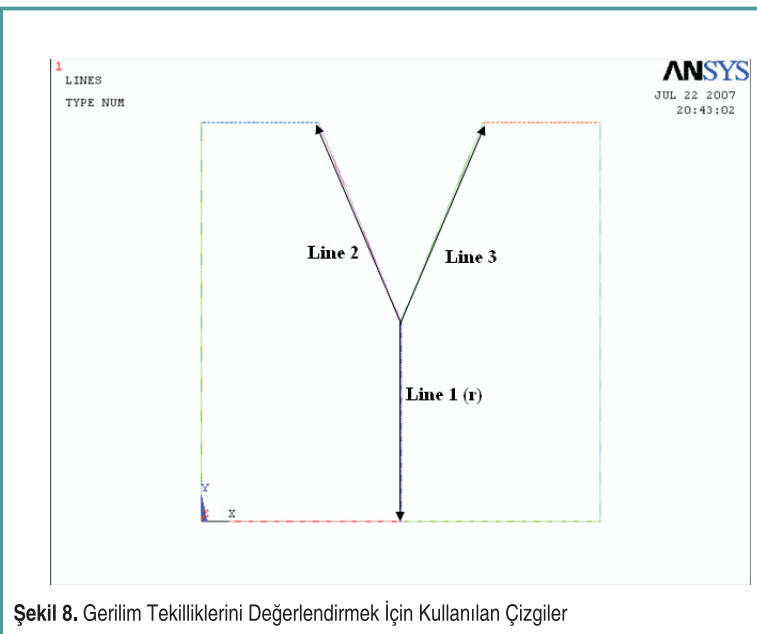
Log-log grafikleri gerilim tekilliği için analitik çözümü ve sonlu elemanlar yaklaşımı sonuçlarını karşılaştırabilmek için



Şekil 6. Tepe Açısı $\alpha=315^\circ$ Olan Plaka İçin Çok Düzenli Ağ Yapısı

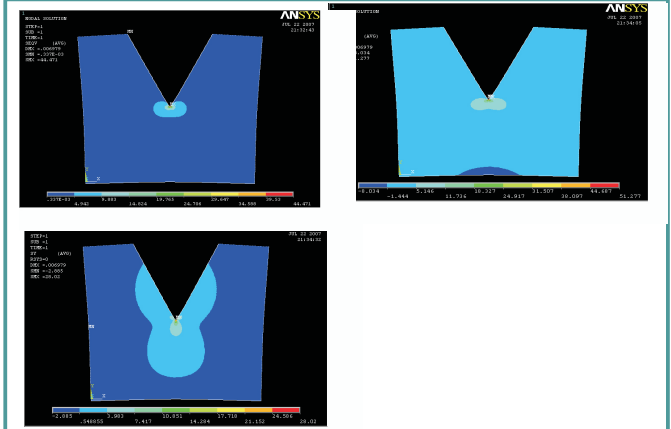


Şekil 7. Çok Düzenli Ağın Yakın Görünümü

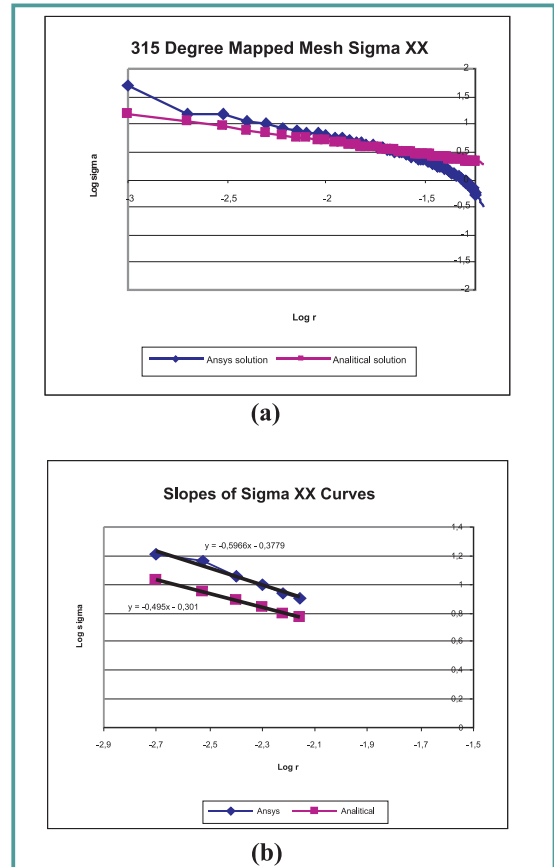


Şekil 8. Gerilim Tekilliklerini Değerlendirmek İçin Kullanılan Çizgiler

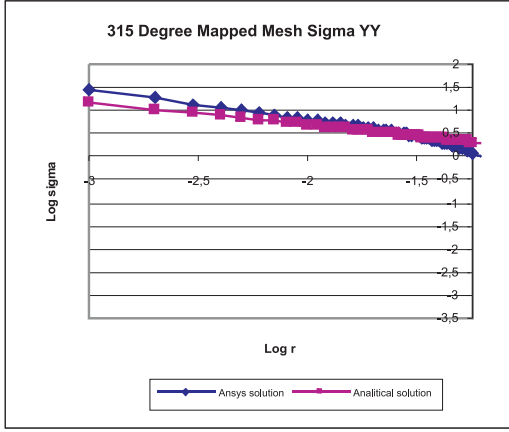
kullanılmıştır. Gerilim yoğunluk faktörü analitik çözüm için değerlendirilmemiştir ve K analitik eğrilerin sapmaları uygunluğa göre seçilmiştir.



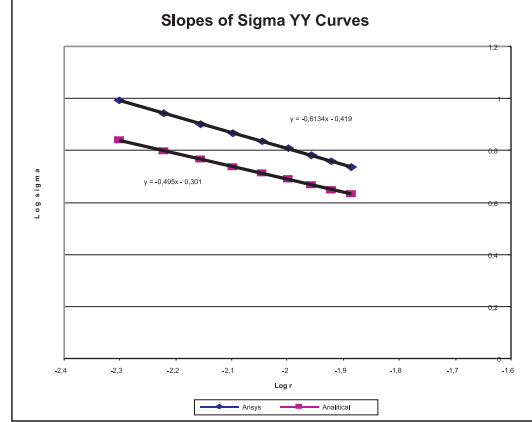
Şekil 9. 315° Tepe Açısı İçin σ_{1M} (üste solda), σ_{xx} (üste sağda) ve σ_{yy} (aşağıda) Değerlerinin Çok Düzenli Ağ Yapısı İçin Sonlu Elemanlar ANSYS Kodu İle Elde Edilen Yaklaşım Dağılımları



Şekil 10. (a) $\alpha=315^\circ$ de σ_{xx} için Çizgi 1 Boyunca Sonlu Elemanlar Yöntemiyle Çok Düzenli Ağ Sisteminden Elde Edilen Sonuçlar İle Analitik Yolla Elde Edilen Sonuçların Verilen Tekil Noktanın Uzaklığına r Bağlı Olarak Çizimi. (b) Şekil 10-a'nın Detaylı (yakından) Gösterimi, λ 'nin Değerlendirilmesini Kolaylaştırmaktadır.

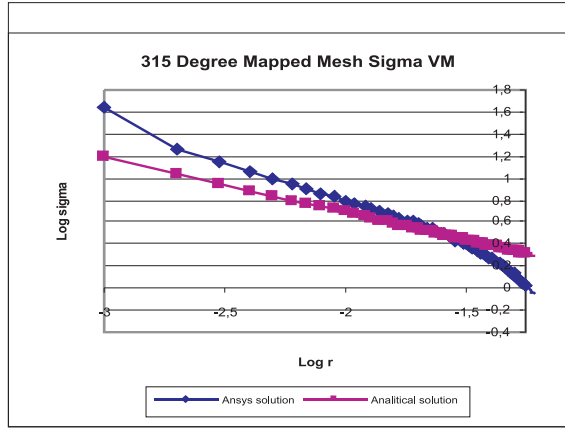


(a)

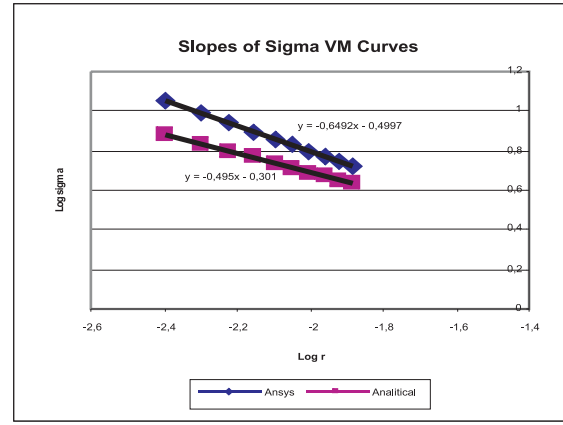


(b)

Şekil 11. (a) $\alpha=315^\circ$ de σ_{yy} için Çizgi 1 Boyunca Sonlu Elemanlar Yöntemiyle Çok Düzenli Ağ Sisteminden Elde Edilen Sonuçlar ile Analitik Yolla Elde Edilen Sonuçların Verilen Tekil Noktanın Uzaklığına r Bağlı Olarak Çizimi. (b) Şekil 11-a'nın Detaylı (yakından) Gösterimi, λ' 'nin Değerlendirilmesini Kolaylaştırmaktadır.

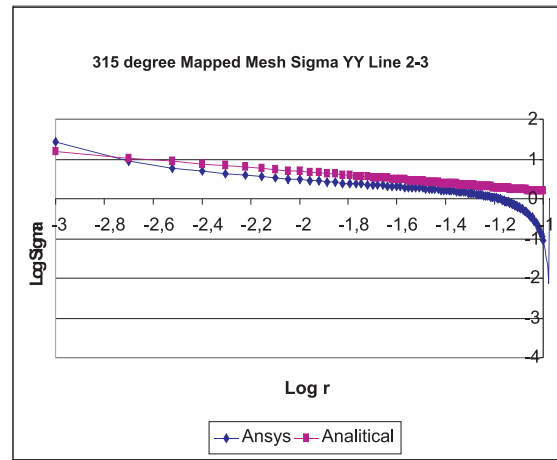


(a)

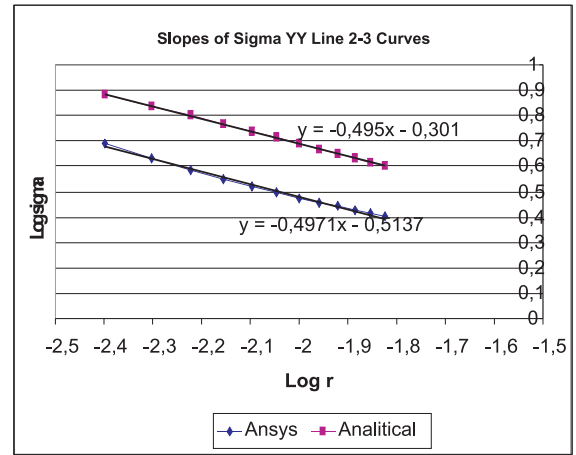


(b)

Şekil 12. (a) $\alpha=315^\circ$ de σ_{VM} için Çizgi 1 Boyunca Sonlu Elemanlar Yöntemiyle Çok Düzenli Ağ Sisteminden Elde Edilen Sonuçlar ile Analitik Yolla Elde Edilen Sonuçların Verilen Tekil Noktanın Uzaklığına r Bağlı Olarak Çizimi. (b) Şekil 12-a'nın Detaylı (yakından) Gösterimi, λ' 'nin Değerlendirilmesini Kolaylaştırmaktadır.



(a)



(b)

Şekil 13. (a) $\alpha=315^\circ$ de σ_{yy} için Çizgi 2 ve 3 Boyunca Sonlu Elemanlar Yöntemiyle Çok Düzenli Ağ Sisteminden Elde Edilen Sonuçlar ile Analitik Yolla Elde Edilen Sonuçların Verilen Tekil Noktanın Uzaklığına r Bağlı Olarak Çizimi. (b) Şekil 13-a'nın Detaylı (yakından) Gösterimi, λ' 'nin Değerlendirilmesini Kolaylaştırmaktadır.