

# BİLGİSAYAR DESTEKLİ MÜHENDİSLİK

Dr. Erhan Turan<sup>1</sup>

## 1. GİRİŞ

Bilgisayar destekli Mühendislik, ("CAE : Computer Aided Engineering"), karışık geometriye sahip, ya da zor bir fizik barındıran problemlerin çözümlenmesinde sıkça başvurduğumuz bir yöntemdir. Temel mühendislik eğitimi sırasında, Isı Transferi, Akışkanlar Mekaniği ya da Mukavemet gibi alanlarda, doğadaki sistemlerin davranışı ile ilgili genel prensipler, basit geometrik nesnelere üzerinden anlatılsa da, gerçek hayattaki uygulamalar, daha karışık formüllerin kullanılmasını gerektirir. Çoğu durumda ise, üzerinde çalışılması gereken probleme özgü bir denklem bulunmamaktadır. Böyle durumlarda, sayısal yöntemlere başvurulur. Mühendislik matematiği ve yaklaşık çözümler yöntemleri harmanlanarak, karışık problemlerin çözümlenmesi için bir altyapı oluşturulur. Bu yazıda, bilgisayar destekli mühendislik simülasyonları tartışılmaktadır.

## 2. BİLGİSAYAR DESTEKLİ MÜHENDİSLİĞİN UYGULANDIĞI ALANLAR

Genel hali ile CAx olarak da adlandırılan yaklaşımlar, CAD, CAE, CAM vb. alanları içerir. Yazımız özellikle CAE ("Com-

puter Aided Engineering") alanına odaklanacak olsa da, üzerinde analiz yapılması gereken geometrilerin çizilmesini sağlayan CAD ("Computer Aided Design"), ve üretimi için CNC makinalarına ya da benzer sistemlere uygun komut kümesi ("G-code") yaratan CAM ("Computer Aided Manufacturing") alanları da kendi başlarına önemli ve ayrı tartışmaları hakeden konulardır. Burada, CAE alanında, özellikle Mühendislik Matematiğine ve bunun analize çevrilmesi ile ilgili alanlardan söz edilecektir.

### 2.1 Mühendislik Problemlerinin Bilgisayar Destekli Mühendislik Uygulamaları İçin Tanımlanması

Mühendislik problemleri, diferansiyel denklemler ile tanımlanır. Problemin boyutuna ve zamandan bağımsız olup olmadığına göre basitleştirmeler yapılabilir. Genel anlamda, ODE ("Ordinary Differential Equations") ve PDE ("Partial Differential Equations") olarak sınıflandırabileceğimiz problemler sıkça karşımıza çıkmaktadır. Bir dinamik sistemin tanımında, ODE yaklaşımı ile çözüm sağlanabilir. Akışkanlar Mekaniğinde ise PDE ile tanımlanmış, Navier-Stokes denklemleri gibi zor sistemler ile de çalışmak gerekir.

<sup>1</sup> Makine Mühendisi, Kurucu Ortak ve CTO, Simularge AŞ - [erhan.turan@simularge.com](mailto:erhan.turan@simularge.com)

Bir mühendislik analizinin yapılabilmesi için, problemin düzgün bir şekilde tanımlanması gerekir. Bir CAD yazılımı (Autocad, Solidworks, FreeCAD, Salome) ile geometrinin hazırlanması, analiz ayarlarının sadece bir kısmıdır. Sınır koşulları (yükler, sıcaklık, hız), zamana bağlı bir problem ise başlangıç koşulları, kullanılan malzemenin ya da akışkanın tipi ve üzerinde sonra bahsedeceğimiz ağ yapısının da hazırlık aşamasında tanımlanmış olması gerekmektedir. Analiz yapmadan önce belirlenmesi gereken son bir adım da, hangi fiziksel olayların baskın olduğunu anlamaktır. Katı bir malzeme ile çalışılacaksa, Mukavemet ya da Isı Transferi denklemleri üzerinde hareket etmek gerekecektir. Ya da bir aracın etrafındaki havanın davranışı modellenmek isteniyorsa, Aerodinamik bir hesaba ihtiyaç var demektir; bu da bizi Akışkanlar Mekaniğine yönlendirmiş olur.

## 2.2 Mühendislik Problemlerinin Bilgisayar Destekli Mühendislik Uygulamaları için Hazır Hale Getirilmesi

Fiziksel problemin tanımlanmasından sonraki adım, yaklaşık çözümlerin yapılabilmesi için gerekli olan ayrıklaştırma ("discretization") işleminin tamamlanmasıdır. Bu işlemlerde amaç, karışık olan geometrilerin, üzerinde PDE sistemlerinin yazılmasını sağlayabilecek basit küçük par-

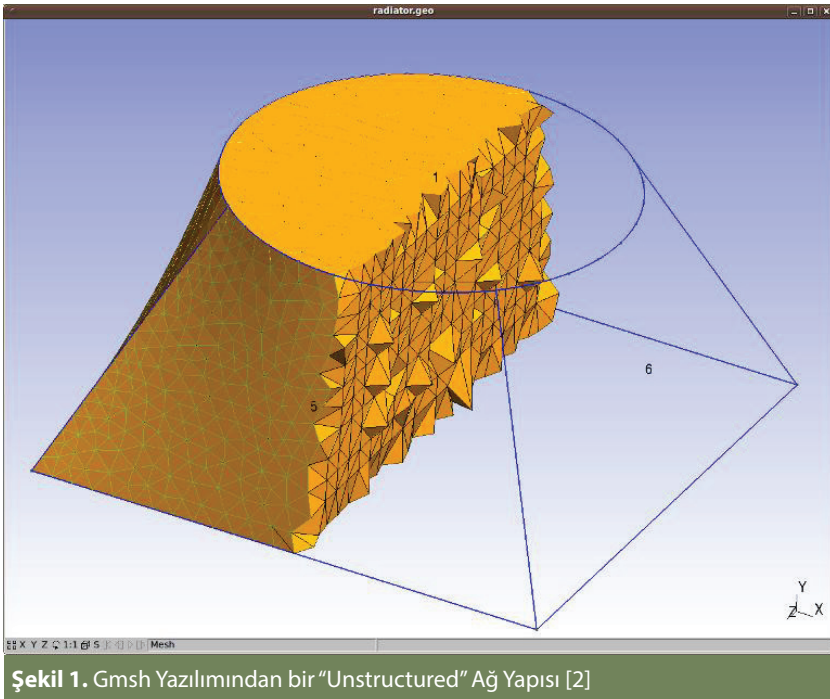
çalara bölünmesidir. Örneğin 2 boyutta, dörtgenlerden, ya da üçgenlerden oluşan bu küçük geometriler üzerinde yapılan tahminlemeler, tüm parçaların bir araya getirilip beraber çözülmesi ve hesaplanarak gerçek geometride sonuç alınabilmesi için bize yardımcı olur.

Basit geometrilerde; dikdörtgen, kare, küp, silindir vb. bu işlemler dörtgen elemanlar ile tamamlanabilirken, ayrıntısı zor olan problemlerde özel "Mesher" yazılımlar kullanılmalıdır. Bu yazılımlar, kullanıcının isteğine göre farklı mertebelerden ve farklı eleman tiplerinden oluşabilir. Dörtgenel ("Quad", "Hexa") elemanlardan oluşan ağ yapılarına düzenli-ağ ("structured mesh"), üçgenlerden ve üçgen prizmalardan ("triangle", "tetra") oluşan ağ yapılarına ise düzensiz-ağ ("unstructured mesh") denir. Bu iki ağ yapısının bir arada olduğu ağ yapıları da sıklıkla kullanılır ve bunlara da hibrid-ağ denir. Şekil 1'de, Açık Kaynak Kodlu bir yazılım olan Gmsh [1] ile atılmış bir düzensiz ağ gösterilmektedir.

Son yıllarda tercih edilen yöntemlerden biri de voxel ağ yapısıdır. Bu tarz yaklaşımlarda, problem geometrisi ne kadar karışık olursa olsun, geometrinin birbirine eş boyutta küçük küpler ile bir ağ yapısına sahip olması sağlanır. Özellikle bir yerden verisi okunarak (örneğin MRI – "Magnetic Resonance Imaging"<sup>2</sup>- dosyaları) zaten belli bir çözünürlüğe sahip geometrilerde bu yaklaşım iyi sonuçlar vermektedir. Şekil 2, ParFE projesi ile modellenen bir insan kemiği benzeri bir geometriye atılmış ağ yapısını göstermektedir.

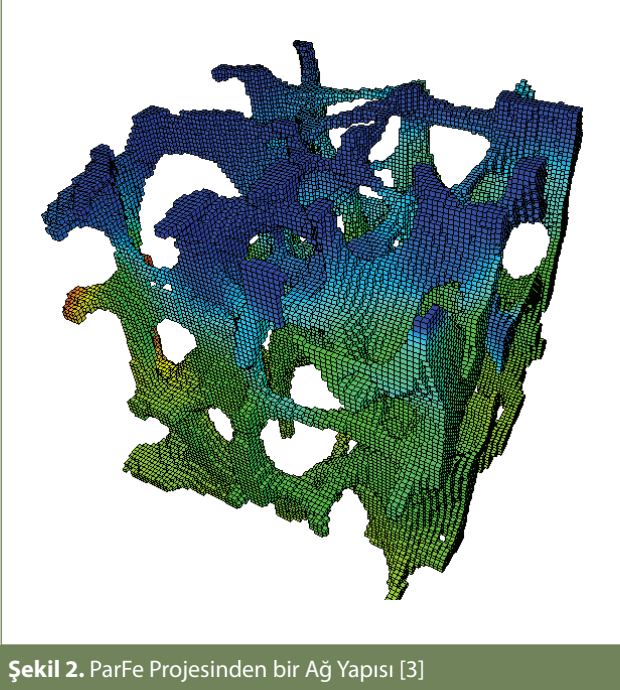
## 2.3 Mühendislik Problemlerinin Bilgisayar Destekli Mühendislik Yöntemleri ile Çözümü için Kullanılan Yöntemler

Belirli bir ağ yapısı elde ettikten sonraki adım, ayrıklaştırmanın matematiksel denklemler ile birleştirilmesidir. PDE üzerinde yapılan ayrıklaştırma işlemlerinde en fazla kullanılan yöntemler, Sonlu Farklar ("Finite Difference"), Sonlu Elemanlar ("Finite Elements") ve Sonlu Hacimler ("Finite Volume") yöntemleridir. Sonlu farklar yöntemi,



Şekil 1. Gmsh Yazılımından bir "Unstructured" Ağ Yapısı [2]

<sup>2</sup> Güçlü bir manyetik alana yerleştirildiğinde dokuların atom çekirdeğinin yüksek frekanslı radyo dalgalarına tepkisini ölçerek görüntü üretme tekniği.



Şekil 2. ParFe Projesinden bir Ağ Yapısı [3]

uygulanması en kolay yöntem olmakla beraber, düzenli bir ağ yapısına ihtiyaç duyar. "Immersed Boundary Methods" gibi yöntemler [4] ağ yapısındaki kısıtı azaltsa da, problemin tanımlanmasını zorlaştırır. Sonlu farklar yöntemi ile karışık problemlere düzenli ağ yaratabilmek için "Conformal Mapping" [5] gibi yöntemlerden yararlanılabilir. Denklemleri, içinde "Jacobian" ve koordinat dönüşümleri içerecek şekilde güncelleyen bu metod tercih edildiği zaman, aşağıdaki eşitlikle tanımlanan Laplace Operatörü üzerinde Sonlu Farklar Yöntemi hızlıca uygulanabilir [6].

$$\Delta u(x) = u''(x) \approx \frac{u(x-h) - 2u(x) + u(x+h)}{h^2} =: \Delta_h u(x).$$

Laplace Operatörü üzerinde Sonlu Farklar Yöntemi [6]

Sonlu farklar yöntemi kullanımı genel olarak üniversite-deki temel mühendislik eğitimi ve bazı basit geometrilerin analizi ile sınırlı kalmaktadır. Ticari olarak kullanılan yöntemler; sırasıyla Sonlu Elemanlar ve Sonlu Hacimler yöntemleridir. Sonlu hacimler yöntemi Akışkanlar Mekaniğinde, Sonlu Elemanlar yöntemi ise Mukavemet ve Isı Transferi problemlerinde ilk tercih edilen yöntemlerdir. Sonlu Elemanlar yönteminin Akışkanlar mekaniği üzerinde de uygulandığı çalışmalar da yıllardır sürmektedir. Sonlu Hacim yöntemlerinin, Mukavemet üzerindeki kullanımı ile ilgili akademik araştırmalar ise son yıllarda yavaş yavaş artmaktadır.

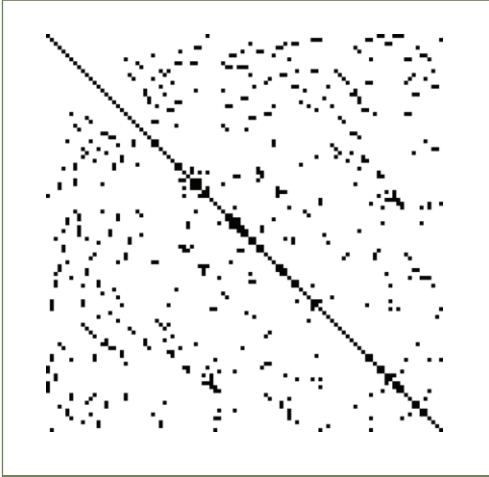
Adlarından da anlaşılacağı üzere, Sonlu elemanlar ve hacimler yöntemleri, ağ yapısındaki küçük parçaların üzerinde işlem yaparken, sonlu farklar yöntemi, aynı geometrilerin köşelerinde işlem yapmakla yetinir. Problemler çözümlenirken, yaklaşık hesabın tamamlanması için izlenen hata ölçerleri ("error norm" – "residual norm"), Sonlu Farklar yönteminde sadece köşelerdeki değerlerin hata payını ölçerken, Sonlu Elemanlar yönteminde tüm elemanın içindeki ortalama hata payının düşürülmesi hedeflenir. Bu açıdan, aşağıdaki eşitlikle tanımlanan Laplace operatörü üzerinde Sonlu Elemanlar yöntemi daha kontrollü bir hata takibi sağlar [7].

$$\int_{\Omega} f v ds = - \int_{\Omega} \nabla u \cdot \nabla v ds \equiv -\phi(u, v),$$

Laplace Operatörü üzerinde Sonlu Elemanlar Yöntemi [7]

Bu ise, üzerinde analiz yapılan denklemin bir ağırlık fonksiyonu ("weight function") ile çarpılarak integralinin minimize edilmesi ile sağlanır. Yukarıdaki eşitlikte, sonlu farklar yöntemi ile yapılan ayrıklaştırmanın benzeri, Sonlu Elemanlar yöntemi ile sağlanmıştır. Integralli bu yapı, hesapları daha zorlaştırır. Detayları literatürdeki çalışmalara bırakarak anlatmak gerekirse, her elemana özel bir ayrıklaştırma yapılır. Daha sonra bu ayrıklaştırma, sayısal integral yöntemleri ile hesaplanır ve benzer elemanların hepsi bir araya getirilerek ana denklem sisteminin oluşturulması sağlanır. Problemin mertebesi arttıkça ve ağ yapısında kullanılan parçaların da keskinliği arttıkça, elemanlara özel hesaplar daha da karışık hale gelir. Bu nedenle, ticari yazılımlarda, farklı problemlere özel "eleman tipleri" bulunur. Bir katalog gibi sunulan bu elemanların, üzerinde çalışılan mühendislik problemine uygun bir biçimde seçilmesi ile, analizlerin kurulması hızlanmış olur.

Sonlu Farklar yöntemi, uygulama açısından bu iki problem arasındadır. Genel olarak Akışkanlar Mekaniği problemlerinde kullanıldığını belirttiğimiz bu yöntemde, hacimlerin yüzeylerinden çıkan akı ("flux") değerleri üzerinden tahminlemeler yapılır. Özellikle Akışkanlar Mekaniğinde, yöne bağlı hız, basınç ve sıcaklık gibi değerlerin hesaplanması gerektiğinden, bu değerlerin hacim içerisinde konumlandığı yere göre formülasyonlar değişebilir. Hız yönüne göre "up-wind" işlemlerinin uygulanması, sayısal sistemin daha hızlı ve gerçeğe yakın sonuç vermesini sağlar. Elde edilen denklemler, sonlu farklar yöntemi



Şekil 3. Seyrek Matris [8]

minde olduğu gibi daha basit bir şekilde tanımlanabildiği için, Akışkanlar Mekaniği gibi karışık problemlerde, Sonlu Hacimler metodu, Sonlu Elemanlar Metodundan daha çok tercih edilir.

Lineer problemlerde, örneğin Isı Transferi'nde, ayrıklaştırma sonrası büyük bir lineer denklem sistemi elde edilir. Seyrek matris olarak da tanımlanan bu matrislerin büyüklüğü, Ağ aşamasında hesaplanan elemanların sayısı ile değişir. Sık bir ağ yapısına sahip bir problem, gerçeğe daha yakın bir sonuç verirken, bu işlem sonucunda daha büyük bir matris yapısı kaydedilmiş olur.

#### 2.4 Mühendislik Problemlerinin Bilgisayar Destekli Mühendislik Yöntemleri ile Çözümü İçin Kullanılan Çözücüler

Analizlerin tamamlanması için, lineer sistemlerin çözümü gerekir. Bu noktada, çeşitli matris çözücülerinden yararlanabilir. Bu çözücüler, direk ve yinelemeli ("iterative") yöntemler olarak ikiye ayrılır. Gauss eliminasyon yöntemi, doğrudan yöntemlerin en bilineni olmakla beraber, matris büyüdükçe çok yavaş kalmaya başlar. Ticari olarak sıklıkla kullanılan alternatif doğrudan çözüm yöntemi "Frontal Çözücü"lerdir [9]. Bu yazılımlar, özellikle seyrek ("sparse") matris yapısına sahip sistemlerde çok hızlı çalışırlar.

Problemin büyüklüğü arttıkça, bir seçenek olan yinelemeli yöntemler de tercih edilebilir [10]. Bu yöntemlerde seçimler, elde edilen matrisin simetrik olup olmadığına bağlı olarak değişebilir. Simetrik matrislerde en sık kul-

lanılan yöntem PCG ("Preconditioned Conjugate Gradient") yöntemidir. Simetrik olmayan sistemler için çeşitli alternatifler olsa da, bunlar arasından en sık kullanılan yöntemler, GMRES ("Generalized Minimum Residual"), BiCGStab ("Bi-Conjugate Gradient Stabilized") ve QMR ("Quasi-Minimized Residual") yöntemleridir. Krylov Subspace yöntemleri olarak adlandırılan bu yöntemlere ek diğer grup yinelemeli hesap yöntemleri arasında yer alan, "Jacobi", "Gauss-Seider", SOR ("Successive Over-Relaxation") gibi yöntemler de kullanılabilir. Bu yöntemler ayrıca, "Multigrid" metotları ile de hızlandırılabilirler [11].

Mühendislik problemleri her zaman lineer sistemlerden oluşmaz. Non-linear sistemlerin çözümlerinde de farklı yöntemlerin tercih edilmesi gerekir. En sık tercih edilen yöntem aşağıdaki eşitlikle tanımlanmış olan, "Newton's Method"dur [12]:

$$\mathbf{x}_{n+1} = \mathbf{x}_n - J_F(\mathbf{x}_n)^{-1} F(\mathbf{x}_n)$$

Birbirine ardışık çeşitli lineer sistemlerin tekrar tekrar çözülmesini gerektiren bu yöntemde, Jacobian matrisinin hesaplanması ( $J_f$ ), en fazla zaman kaybettiren aşamadır. Literatürde bununla ilgili çeşitli yöntemler de mevcuttur.

Ağ yapısı ayarlanan, ayrıklaştırılması tamamlanan ve lineer/non-linear sistemi hazır olan problemin çözümü, genelde yüksek işlemci ve hafıza kapasitesi olan sunucularda elde edilir. Bu sistemler aynı zamanda, problemin çözümü bittikten sonra, sonuçların görsel olarak incelenmesi ve gerekli bazı ek hesapların (örneğin Stress değerleri, Isı Akısı değerleri) yapılması için de kullanılır. Ticari yazılımların bu amaç için kendi "post-processor"leri vardır. Açık kaynak kodlu en sık kullanılan post-processor ise ParaView yazılımıdır [13].

### 3. SONUÇ

CAE, üzerinde tecrübe isteyen, birden fazla alana hâkim olmayı zorunlu kılan ama bir o kadar da teknik insanlara tatmin veren bir disiplindir. Yurdumuzda bu alanda çalışan insan sayısı maalesef dünya ortalamasının altındadır. Bu nedenle, ülkemizde, mühendislik yazılımlarının büyük çoğunluğu yurtdışı menşelidir. Döviz ile fiyatlanan bu yazılımların kullanımı, bu alanda dış ticaret açığı oluşturmaktadır. Açık Kaynak Kodlu yazılımlar (OpenFOAM[14], Elmer[15], CalculiX[16], CodeAster[17],Fenics [18]) yanısı-

ra, TwinIDE [19] gibi, yerli çözümler bu açığın kapatılmasına seçenek oluşturmaktadır.

## KAYNAKÇA

1. **Geuzaine, C., Remacle, J. F.** 2009. "Gmsh: A Three-Dimensional Finite Element Mesh Generator with Built-in Pre- and Post-processing Facilities". International Journal for Numerical Methods in Engineering 79(11), pp. 1309-1331, <http://gmsh.info/> <http://gmsh.info/>, son erişim tarihi: 7 Ekim 2021
2. Gmsh, <https://en.wikipedia.org/wiki/Gmsh>, son erişim tarihi: 7 Ekim 2021
3. ParFE, Mennel, U et al, <http://parfe.sourceforge.net/>, son erişim tarihi: 7 Ekim 2021
4. **Peskin, C. S.** (1972-10-01). "Flow patterns around heart valves: A numerical method", Journal of Computational Physics., 10 (2): 252-271
5. Conformal Map, [https://en.wikipedia.org/wiki/Conformal\\_map](https://en.wikipedia.org/wiki/Conformal_map), son erişim tarihi: 7 Ekim 2021
6. Finite Difference Method, [https://en.wikipedia.org/wiki/Finite\\_difference\\_method](https://en.wikipedia.org/wiki/Finite_difference_method), son erişim tarihi: 7 Ekim 2021
7. Finite Element Method, [https://en.wikipedia.org/wiki/Finite\\_element\\_method](https://en.wikipedia.org/wiki/Finite_element_method), son erişim tarihi: 7 Ekim 2021
8. Sparse Matrix, [https://en.wikipedia.org/wiki/Sparse\\_matrix](https://en.wikipedia.org/wiki/Sparse_matrix), son erişim tarihi: 7 Ekim 2021
9. Frontal Solver, [https://en.wikipedia.org/wiki/Frontal\\_solver](https://en.wikipedia.org/wiki/Frontal_solver), son erişim tarihi: 7 Ekim 2021
10. **Barrett, R., Berry, M., Chan, T. F., Demmel, J., Donato, J., Dongarra, J., Eijkhout, V., Pozo, R., Romine, C., Van der Vorst, H.,** SIAM 1994, [https://www.netlib.org/linalg/html\\_templates/Templates.html](https://www.netlib.org/linalg/html_templates/Templates.html), son erişim tarihi: 7 Ekim 2021
11. Multigrid Method, [https://en.wikipedia.org/wiki/Multigrid\\_method](https://en.wikipedia.org/wiki/Multigrid_method), son erişim tarihi: 7 Ekim 2021
12. Newton's Method, [https://en.wikipedia.org/wiki/Newton%27s\\_method](https://en.wikipedia.org/wiki/Newton%27s_method), son erişim tarihi: 7 Ekim 2021
13. Kitware Inc, <https://www.paraview.org/> <https://www.paraview.org/>, son erişim tarihi: 7 Ekim 2021
14. OpenFOAM Foundation, <https://openfoam.org>, son erişim tarihi: 7 Ekim 2021
15. Elmer, <https://www.csc.fi/web/elmer>, son erişim tarihi: 7 Ekim 2021
16. CalculiX, Dhondt, C. <http://www.dhondt.de/>, son erişim tarihi: 7 Ekim 2021
17. Code Aster, <https://www.code-aster.org/>, son erişim tarihi: 7 Ekim 2021
18. Fenics, <https://fenicsproject.org>, son erişim tarihi: 7 Ekim 2021
19. Simularge AŞ, Büryan Turan, Erhan Turan, <https://www.twinide.com>, son erişim tarihi: 7 Ekim 2021

## DEĞERLİ ÜYELERİMİZE

**Bugün, siz değerli üyelerimizin örgütlü gücüne her zamankinden daha fazla ihtiyaç duymaktayız.**

İktidarın, kamusal denetimi gerileten uygulamaları, halkın can güvenliğini ortadan kaldırmakla birlikte, Odamızın hizmet alanlarının daralmasına da yol açmaktadır.

Bütün ekonomik zorluklara rağmen, bilimsel gerçeklikler ışığında, mühendislik uygulamalarının önemini ortaya koyan raporlar yayımlama; mesleğimizi, meslektaş gelişirmeye yönelik eğitim çalışmaları ile yine meslek alanlarımız üzerinde üyelerimizi ve toplumu bilgilendirmeye yönelik bülten, dergi, kitap, broşür ve benzeri yayın çalışmalarımızı sürdürme kararlılığımızdayız.

Bu nedenle, sizlere ve halkımıza verdiğimiz hizmetlerin yanında çok temsilî kaldığına inandığımız üyelik aidatlarının ödenmesi konusunda katkılarınızı bekliyoruz.

<https://aidat.mmo.org.tr>

