

TALEP VE KAPASİTE KISITLI OPTİMİZASYON PROBLEMİ İÇİN YENİ BİR MELEZ ALGORİTMA

Harun Reşit YAZGAN*, Serap ERCAN, Ceren ARSLAN

Sakarya Üniversitesi, Endüstri Mühendisliği Bölümü, Sakarya
yazgan@sakarya.edu.tr, serape@sakarya.edu.tr, cerenarslan@gmail.com

ÖZET

Optimizasyon problemleri arasında en önemlilerinden biri de ulaşımda Araç Rotalama Problemi'dir (ARP). ARP'nin amacı, müşterilerin taleplerini en az mesafeli rota ve araç ile karşılamaktır. Bu makalede, talep ve kapasite kısıtlı ARP ele alınmış ve bunun çözümü içinde literatürde geçen Clarke ve Wright tasarruf algoritması ile en kısa yol yöntemini esas alan yeni bir melez algoritma geliştirilmiştir. Algoritmalar farklı sayıdaki problem setleri ile denenmiş ve elde edilen sonuçlar, ANOVA testi ile yorumlanmıştır. Sonuçlar, yeni geliştirilen melez metodun daha iyi sonuçlar verdiğini göstermiştir.

Anahtar Kelimeler: Araç rotalama problemi, Clarke ve Wright yöntemi, en kısa yol yöntemi

A NEW HYBRID ALGORITHM FOR OPTIMIZATION PROBLEM UNDER DEMAND AND CAPACITY CONSTRAINTS

ABSTRACT

Vehicle routing problem (VRP) can be considered as one of the most important optimization problems in a transportation sector. The objective of the routing problem is to meet the customers' demand under considering minimum distance of the routes and number of cars. In this article, capacity of cars and customers' demand were assumed as constraints of the VRP problem. A new hybrid method was developed based on the Clarke and Wright savings and the shortest path algorithms from the literature. The algorithms were tested on different problem sets. Obtained results were interpreted by ANOVA test. The results illustrated that the new algorithm provides better results than the other two algorithms.

Keywords: Vehicle routing problem, the Clarke and Wright algorithm, the shortest path method

* İletişim yazarı

1. GİRİŞ

Araç Rotalama Problemi, genel olarak bir işletmenin konumları belirli n adet talep noktasına servis sunabilmesi için bazı kısıtların göz önüne alınması ve en az maliyetin amaçlandığı araç rotalarının belirlenmesidir. İşletmelerde, özellikle ürünlerin dağıtım sırasında karşılaşılan bu problem, bazı sektörlerde oldukça yüksek maliyetlere neden olmaktadır. Bu sebeple ARP'nin etkili bir şekilde çözümünün yapılması, büyük miktarda tasarrufların sağlanması açısından önemlidir.

ARP çözümü NP-hard sınıfına girmektedir. Problemin çözüm uzayı, problemde yer alan müşterilerin sayısı ile üstel orantılı olarak büyümektedir. Literatürde ARP'ye çözüm üretmek için geliştirilen farklı yöntemleri bulmak mümkündür. Bunlar, kesin ve sezgisel yöntemler olmak üzere ikiye ayrılmaktadır. Kesin yöntemler, küçük problemler için optimum sonucun bulunmasını mümkün kılmasına rağmen, problem boyutu büyüdüğünde oldukça fazla sayıda hesaplama ihtiyacına gereksinim doğmaktadır. Bundan dolayı da sezgisel yöntemlere ihtiyaç duyulmaktadır. Sezgisel yöntemler de ise büyük problemler için daha az işlem ve hesaplama süresiyle optimuma yakın çözümlere ulaşılmaktadır (Aydemir, 2006; Tüfekçier, 2008; Tokaylı, 2005).

Bu makalede, bir araç rotalama probleminde toplam kat edilen mesafeyi en aza indirmek için sezgisel yöntemlerden Clarke ve Wright tasarruf algoritması ve en kısa yol yönteminin avantajlı yanlarını bir araya getirerek yeni bir melez algoritma geliştirilmiştir. Çalışmanın birinci, giriş bölümünde, konu hakkında genel bir bilgi verilmiş; ikinci bölümünde, ARP detaylı bir şekilde incelenmiş ve üçüncü bölümde ise literatür taraması yapılarak araç rotalama problemlerinin çözüm yöntemlerinden bahsedilmiştir. Dördüncü bölümde, melez algoritmayı oluştururken kullandığımız sezgisel yöntemler açıklanmış ve beşinci bölümde ise farklı problem setleri ele alınarak, aynı problemler Clarke ve Wright algoritması, en kısa yol yöntemi ve yeni geliştirilen melez algoritma ile ayrı ayrı çözülerek elde edilen sonuçlar Anova testi ile yorumlanmıştır. Son bölümde ise elde edilen bulgular ve sonuçlar özetlenmiştir.

2. ARAÇ ROTALAMA PROBLEMİ

İşletmelerin toplam lojistik ve dağıtım maliyetlerinin 1/3-2/3'ü taşıma maliyetlerinden kaynaklandığından dağıtım ekipmanının ve personelinin etkili ve verimli bir şekilde kullanımı, işletme yöneticileri açısından önemli bir ilgi alanı haline gelmiştir. Dağıtım maliyetlerini azaltmak ve müşterilere sunulan hizmetin kalitesini artırmak için, en kısa zamanı ve/veya mesafeyi verecek olan bir aracın şebeke içerisinde izleyeceği en uygun rotanın bulunması önemli konulardan biri haline gelmiştir. Standart bir araç rotalama probleminde, depolardan araçlar vasıtasıyla değişik noktalarda bulunan müşteri talepleri karşılanmaya çalışılmaktadır. Bunu gerçekleştirmekteki amaç, müşteri ihtiyaçlarını mümkün olan en kısa zamanda ve/veya en kısa yoldan ve en az maliyetle karşılayacak rotanın bulunmasıdır. Müşteri ihtiyaçlarını karşılamak amacıyla araç rotalama yapılırken aşağıdaki varsayımlar dikkate alınmalıdır (Demiral, 2008; Gerdan, 2007; Arslan 2007).

- Müşterilerin talepleri tamamıyla karşılanmalıdır.
- Her varış noktası tek bir araç tarafından sadece bir defa ziyaret edilmelidir.
- Rota, depodan başlamalı ve tekrar depoda sonlanmalıdır.
- Rota üzerinde bulunan müşterilerin toplam talep miktarı aracın toplam kapasitesinden fazla olmamalıdır.
- Her bir araç sadece bir rota üzerinde faaliyet göstermelidir.

Araç rotalama problemleri; statik-dinamik araç rotalama problemi, rotaların, kısıtların ve yolların durumuna göre araç rotalama problemi olmak üzere dört grupta incelenebilir. Statik araç rotalama probleminde, problem çözülmeden önce gerekli verilerin (müşteri talepleri, araç kapasiteleri vb.) bilinmesi gerekmekte ve bunların belirli bir süre değişmediği kabul edilmektedir. Dinamik durumda ise dağıtım devam ederken beklenmedik bir şekilde yeni talep noktalarının ortaya çıkması, müşterilerin taleplerinin değişmesi, bazı yolların iptal edilmesi veya trafik sıkışıklığı nedeniyle ulaşım süresinin uzaması gibi

beklenmeyen durumlar karşısında hızlı bir şekilde yeni çözümlere ihtiyaç duyulduğu ortamların ortaya çıkmasıdır. Rota durumlarına göre incelendiğinde, kapalı ve açık uçlu olmak üzere iki kısımda ele alınabilir. Kapalı uçluda rota, bir depoda başlamalı ve aynı depoda son bulmalıdır. Açık uçluda ise rota bir depo ile başlamakta, talep noktası ile sona ermektedir. Kısıtlarına göre ele alındığında ise kapasite, mesafe, zaman pencereli, müşteri tipi farklı ve karma yüklemeli olmak üzere beş bölümde incelenebilir. Kapasite kısıtı, bir veya daha fazla deposu bulunan bir işletmede talepleri bilinen n adet müşterinin ihtiyaçlarının araç kapasitesini dikkate alarak karşılanmasını sağlayacak bir yükleme probleminin çözülmesi işlemidir. Mesafe kısıtı, rotalara atanan her aracın gidebileceği maksimum mesafe kısıtlılığının olduğunun varsayılmasıdır. Zaman kısıtı ise her müşteriye belirlenmiş bir zaman diliminde ulaşılmasıdır. Müşteri tipinin farklı olmasında ise iki grup müşteri bulunması muhtemeldir. Birinci gruptaki müşteriye ürün teslim edilirken, diğer gruptaki müşteriden ürün teslimi yapılabilmesi mümkündür. Bir araç, her iki tip müşteriye de hizmet verebilmektedir. Karma yüklemeli de ise bir müşteriye hem ürün teslimatı hem de müşteriden ürün alımı yapılabilmektedir. Son olarak, sınıflandırmayı yollara göre ele alırsak, simetrik ve asimetrik olarak ikiye ayrılabilir. Simetrikte bir noktadan diğerine olan gidiş dönüş mesafesinin eşit olduğu kabul edilmektedir. Asimetrik olanda ise y ve z , iki nokta olarak ele alınırsa, y noktasından z noktasına gitmek için gerekli olan mesafe, z 'den y noktasına olan mesafeye eşit olamayabilir. Böyle bir durumda, araçların ilk olarak hangi müşteriye gideceği önem kazanmaktadır (İşleyen, 2008; Yılmaz, 2008; Şeker 2007).

3. LİTERATÜR TARAMASI

Literatürde çözümü zor problemler arasında yer alan Araç Rotalama Problemleri, klasik gezgin satıcı probleminin genelleştirilmiş bir halidir. Dolayısıyla, araç rotalama problemleri de NP-hard (zor) problemler sınıfında yer almaktadır (Laporte, 2007). Bu problemin çözümü için çeşitli, kesin çözüm yöntemleri önerilmiştir. Bu algoritmalar arasında dal-sınır

algoritmaları (Christofides vd. 1981a), dal-kesme algoritmaları (Laporte vd. 1985), dal-kesme-fiyat algoritmaları (Fukasawa vd. 2006) ve dinamik programlama (Christofides vd. 1981b) yer almaktadır. Ayrıca literatürde yer alan çözüm yöntemlerini sezgisel ve meta sezgisel metotlar olarak ikiye ayırabiliriz. Araç rotalama probleminin çözümünde kullanılan meta sezgisel yöntemlerden bazıları şunlardır: Tabu arama, tavlama benzetimi, karınca kolonisi ve genetik algoritmalarıdır. Tabu arama algoritması, araç rotalama problemine en çok uygulanan ve en iyi çözüm veren yöntem olarak literatürde yer almaktadır. Bu yöntemin çeşitli versiyonları, Taillard (1993), Gendreau vd. (1994), Rochat ve Taillard (1995), Kelly ve Xu (1996), Brandao (2004), Fu vd. (2005) tarafından problemin çözümünde kullanılmıştır. Tavlama yöntemi ise Li vd. tarafından 2005 yılında araç rotalama problemini çözmek için kullanılmıştır. Karınca kolonisi optimizasyonu, Gambardella (1999) ve Reinmann vd. (2004) tarafından problemin çözümünde kullanılmıştır. Gonzalez ve Fernandez (2000), Baker ve Ayechev (2003), Prins (2004), Alba ve Dorronsoro (2005), ve Jeon vd. (2007) ise araç rotalama probleminin çözümünde genetik algoritmaları kullanmışlardır.

Araç rotalama problemlerinin çözümü için kullanılan diğer yöntem ise sezgisel metotlardır. Sezgisel yöntemler; büyük problemlerde daha az işlemle ve hesaplama süresiyle en iyi çözüme yakın, iyi kalitede çözümler üretir. Sezgisel yöntemleri de iyileştirmeli tek rota, iyileştirmeli çok rota olarak sınıflandırmak mümkündür. Yapısal türdeki sezgisel algoritmalarda ise Clarke ve Wright tasarruf algoritması, eşleme tabanlı tasarruf algoritması, sıralı ekleme sezgisel algoritması ve en kısa yol yöntemi karşımıza çıkmaktadır. Aşamalar açısından sezgisel algoritmalar, çok aşamalıdır; önce grupla sonra rotala ve önce rotala sonra grupla yöntemlerini saymak mümkündür.

Toth ve Vigo (2002) tarafından ARP ile ilgili kapsamlı bir literatür taramasının yapıldığını görüyoruz. Bu taramada, problemin 1959 yılında Dantzig ve Ramser tarafından incelendiğini, çalışmalarında petrol istasyonlarına benzin dağıtım problemini ele aldıklarını, problemlerinin çözümü içinde matematiksel bir

model geliştirdiklerini görüyoruz. Sonraki çalışmalardan en önemlisi ise 1964 yılında Clarke ve Wright'ın aynı problemin çözümü için önerdikleri sezgisel tasarruf algoritmasıdır. Geliştirilen bu algoritmanın literatürde yaygın bir şekilde kullanıldığı bilinmektedir. Bu çalışmalardan birinde Liu ve Shen (1998), zaman pencereli ve birden çok araç tipine sahip probleme çözüm geliştirmişlerdir. Bir başka çalışmada ise Demircioğlu (2009), Mersin'deki bir dağıtım firmasında, yine zaman pencereli olarak bir uygulama çalışması yapmıştır. Aynı metot kullanılarak yapılan bir diğer çalışma da Şahin vd. (2010) tarafından gerçekleştirilmiştir. Yine, Clarke ve Wright, parçalanabilir yüklü bire bir toplama ve dağıtım probleminin başlangıç çözümü için tasarruf algoritmasını kullanmışlardır. Özyurt vd. (2000), çalıştıkları modelde zaman pencereli açık araç rotalama problemlerinin çözümünde tasarruf algoritmasını uygulamışlardır. Elde ettikleri sonuçları test etmek için ise rastgele test değerleri ve bir okul otobüsünü yönlendirme sorunu üzerinde çalışmışlardır. Eryavuz ve Gencer (2001), sezgisel çözüm yöntemlerinden tasarruf algoritmasını kullanarak bir okulun personel servis araçlarının toplam güzergâh mesafesini minimize etmeye çalışmışlardır. Zaman içinde, ilk geliştirilen tasarruf algoritmasına bazı terimler ve varsayımlar eklenerek, farklı formlarının geliştirilerek problemlere uygulandığını görüyoruz. Girard vd. (2005), tasarruf algoritmasının farklı bir versiyonunu geliştirmişler ve bu algoritmanın literatürde geçen farklı test problemlerinden daha iyi sonuç verdiğini ifade etmişlerdir. Doyuran (2008) da ek bir hesaplama yükü getirmeden çözüm kalitesini arttırmak için Clarke ve Wright tasarruf formülünün iki ve üç terimli versiyonlarının performansını arttıran çeşitli yaklaşımlar önermiştir.

4. METOTLAR

Bu çalışmada, geliştirilen melez algoritmanın temelini teşkil eden algoritmalar ve yeni algoritmanın detayları aşağıda verilmiştir.

4.1 Clarke ve Wright Tasarruf Algoritması

ARP problemlerinin çözümünde yangın olarak kullanılan yöntemlerden biri de Clarke ve Wright'ın

1964'de geliştirdikleri tasarruf algoritmasıdır. Algoritma, araç sayısının değişken olarak ele alındığı problemlerde uygulanmaktadır. Algoritma ile en uygun rotaların belirlenmesinin yanı sıra, gerekli araç sayısı da hesaplanabilmektedir. Tasarruf algoritmasının paralel ve sıralı olmak üzere iki versiyonu bulunmaktadır. Paralel tasarruf algoritmasının adımları aşağıda belirtilmiştir:

Adım 1: Her müşteri çifti için tasarruflar $s_{ij} = d_{i0} + d_{0j} - d_{ij}$ formülü ile hesaplanmaktadır. s_{ij} değerleri büyükten küçüğe sıralanır.

Adım 2: Paralel tasarruf algoritmasında, s_{ij} değerlerine göre büyükten küçüğe sıralanan müşteri ikilileri ($i-j$) şu kurala göre birleştirilir: Eğer sıralamada xy ve yz müşteri çiftleri ardı ardına geliyorsa, araç kapasite kısıtı göz önüne alınarak $0-x-y-z-0$ güzergâhında bir rota oluşturulur. Aksi takdirde, xy ve tz formatında müşteri çifti peşi sıra geliyorsa, bu müşteri çiftleri için ayrı ayrı rota oluşturulur. Sıralamada ele alınan müşteri çiftleri daha önce oluşturulmuş rotalar ile mukayese edilir, eğer uygunsuzsa rotaya dahil edilir. Burada, birden fazla rota oluşturulup bu rotaları paralel işleyerek müşteri çiftlerini bu rotalardan birine atamak mümkündür. Tasarruf algoritmasının sıralı versiyonunda ise ele alınan xy ve tz formatındaki müşteri çiftleri kapasite kısıtı dikkate alınıp birleştirilerek $0-x-y-t-z-0$ güzergâhında rota oluşturulur. Aynı rota için, sıralamada ele alınan müşteri çiftleri mukayese edilir, eğer kapasite kısıtına uygunsuzsa rotaya dahil edilir. Bu yöntemde bir rota tamamıyla oluşuncaya kadar (kapasite kısıtı dikkate alınarak) müşteri çiftleri taranmaktadır. Her iki yöntemde de müşteri çiftleri rotalara toplam maliyet en az olacak şekilde yerleştirilir.

Tasarruf algoritmasında paralel yöntem, sıralı yönteme göre daha iyi sonuçlar vermektedir. Bunun sebebi, sıralı tasarruf algoritmasında sadece bir rota ele alınıp bu rotayı oluşturmak için s_{ij} tasarruf sıralamasının dikkate alınması, paralel versiyonda ise s_{ij} sıralamasına bakılarak müşteri çiftinin birden fazla rota ile uyumluluğunun kontrol edilmesi ve bu sayede daha fazla alternatifin gözden geçirilebilmesidir (Erol, 2006).

4.2 En Kısa Yol Yöntemi

Tek deponun bulunduğu simetrik kapasiteli ve kısıtlı araç rotalama problemine uygulanabilen bu yöntemin temel mantığı, müşteri noktaları arasında yakınlık uzaklık durumuna ve araç yükleme kapasitelerine göre araçlara müşterilerin atanmasıdır. En kısa yol yönteminde süreç aşağıdaki gibi işlemektedir:

1. Merkezi birimden rotalamaya başlanır. İlk araca merkezi noktaya en yakın müşteri atanır.
2. Rotaya atanan müşteriye en yakın, daha önce rotaya eklenmemiş noktalar incelenir. Eğer müşteriye en yakın iki nokta varsa, her biri için süreç oluşturularak ayrı çözüm dalları oluşturulur.
3. Eğer müşteri direkt olarak merkezi birim ile bağlantılı değilse (oluşturulan rotada müşteri, merkezi birimden sonra gelmiyorsa) ve müşteriye en yakın başka müşteri ile merkezi birim aynı mesafede ise süreç, yine ikiye ayrılarak yeni çözümler oluşturulur. Rotalamada, ilk önce, müşteri başka bir müşteriye araç kapasite kısıtı sağlıyorsa bağlanır. Daha sonra, çözüm ağacında yeni bir dal oluşturularak müşteri direkt olarak merkezi birime bağlanır.
4. Çözümler ayrı ayrı hesaplanarak en uygun çözüm seçilir (Erol 2006).

4.3 Yeni Geliştirilen Melez Algoritma

Bu çalışmada, araç rotalama problemlerinin amacı doğrultusunda aracın kat ettiği mesafeyi azaltmak için Clarke ve Wright tasarruf algoritması ve en kısa yol yöntemi dikkate alınarak yeni bir algoritma geliştirilmiştir. Bu yöntemin adımları aşağıda belirtilmiştir:

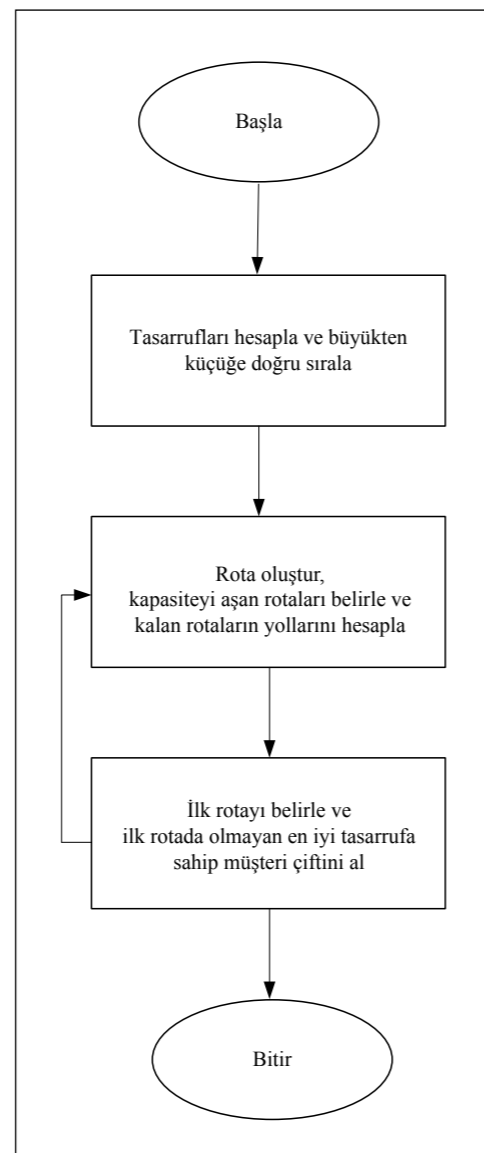
Adım 1: Her müşteri çifti için tasarruflar $s_{ij} = d_{i0} + d_{0j} - d_{ij}$ formülü ile hesaplanmaktadır. s_{ij} değerleri büyükten küçüğe sıralanır.

Adım 2: Paralel tasarruf algoritmasında olduğu gibi, s_{ij} değerlerine göre büyükten küçüğe sıralanan müşteri ikilileri ($i-j$) şu kurala göre birleştirilir: Eğer sıralamada xy ve yz müşteri çiftleri ardı ardına geliyorsa $0-x-y-z-0$ güzergâhında bir rota oluşturulur. Tüm tasarruf sıraları dikkate alınarak müşteri çiftleri kontrol edilir ve $0-x-y-z-0$ şeklinde alternatif rotalar oluşturulur. Bu rotaların içerisinde kapasiteyi aşan

rotalar elenir. Kalan rotaların toplam kat ettikleri mesafeler hesaplanır ve en az mesafeli olan rota, ilk rota olarak alınır.

Adım 3: İlk rota belirlendikten sonra, ilk rotada olmayan en yüksek tasarruf değerine sahip müşteri çifti alınır ve adım 2'deki gibi rotalar oluşturularak devam edilir.

Şekil 1'de melez algoritmanın adımları özet olarak verilmiştir.



Şekil 1. Melez Algoritmanın Adımları

5. UYGULAMA

Bu bölümde, 10 ile 20 müşteri arasında farklı boyutlardaki talep noktalarına sahip araç rotalama problem setleri, Clarke-Wright sezgisel algoritması, en

Geliştirilen algoritmanın, Clarke ve Wright tasarruf algoritması için önemli olan tasarruf değerlerini ve en kısa yol yöntemi için önemli olan kısa yolları bir araya getirdiği için daha iyi sonuç vermesi beklenmektedir.

Tablo 1. Çözümlerin Sonuçları

Müşteri Sayısı	Araç Kapasitesi	Tasarruf Algoritması		En Kısa Yol Yöntemi		Melez Algoritma	
		Toplam Yol	Araç Sayısı	Toplam Yol	Araç Sayısı	Toplam Yol	Araç Sayısı
10	200	591,5	4	588,5	3	536,5	3
10	250	533,5	3	588	3	541	3
10	300	545,5	3	579,5	3	502,5	3
11	200	706,5	4	646,5	4	696,5	4
11	250	686	3	671	4	631	3
11	300	680	3	618	3	629	3
12	200	750,5	4	763	5	750	4
12	250	758	4	658,5	4	656,5	4
12	300	634,5	3	645,5	3	642	3
13	200	823	5	848	5	817	4
13	250	825	4	761,5	4	921	3
13	300	688	3	693	3	688	3
14	200	897,5	5	803	5	924,5	5
14	250	851,5	4	823	5	820	4
14	300	825,5	3	734	3	825	3
15	200	895	5	997,5	6	953	5
15	250	925,5	4	819	4	816	4
15	300	867	3	803	4	840	3
16	200	1025	5	997,5	6	995	5
16	250	994	4	890	4	900	4
16	300	899,5	4	887,5	4	880	4
17	200	1009	5	1033,5	6	1008	5
17	250	1054	5	890	4	900	4
17	300	955,5	4	801	4	820	4
18	200	1105	5	1070	5	1061	5
18	250	1060,5	4	1006	4	970	5
18	300	959,5	4	888,5	4	931,5	4
19	200	1133,5	5	1112,5	6	1062	6
19	250	1058,5	5	999,5	4	1035,5	5
19	300	1008,5	4	846,5	4	860	4
20	200	1168,5	5	1069,5	6	1066	6
20	250	1127	5	1009	5	1003	5
20	300	1037	4	920	4	924	4

kısa yol yöntemi ve yeni geliştirilen melez algoritma ile çözülmüştür. Bu çözüm sonucunda rotalar oluşturularak toplam yollar hesaplanmıştır. Ekte problem setlerine ait uzaklıklar ve talep noktaları verilmiştir. Sonuçlar ise Tablo 1'de özetlenmiştir. Tablodaki sonuçlara da Anova testi ve regresyon analizi uygulanarak algoritmaların performansları incelenmiştir.

5.1 ANOVA Testi

ANOVA, bağımsız değişkenlerin kendi aralarında nasıl etkileşime girdiklerini ve bu etkileşimlerin bağımlı değişken üzerindeki etkilerini analiz etmek için kullanılan istatistiksel bir metottür. ANOVA sonuçlarındaki

p değeri, H_0 hipotezini reddedilmesine yönelik en küçük anlamlılık düzeyini temsil etmektedir. Tablo 1'de verilen Clarke ve Wright tasarruf algoritmasına ait verilere Anova testi uygulandığında aşağıdaki sonuçlar elde edilmiştir. Bu sonuçlar, Tablo 2'de görülmektedir:

Bu çalışmada;

H_0 : Faktörlerin toplam yol üzerinde etkisi yoktur
→ $\mu_1 = \mu_2 = \mu_3 = \mu_4$ ve

H_1 : Faktörlerin toplam yol üzerinde etkisi vardır
→ En az iki $\mu_i \neq \mu_j, i \neq j$

olarak hipotezler tanımlanmıştır. ANOVA tablosun-

Tablo 2. Tasarruf Algoritmasının ANOVA Sonuçları

Çift Yönlü ANOVA: Toplam Yol - Araç Kapasitesi; Müşteri Sayısı					
	DF	SS	MS	F	P
Araç Kapasitesi	2	50307	25153,7	25,50	0,000
Müşteri Sayısı	10	952529	95252,9	96,57	0,000
Hata	20	19728	986,4		
Toplam	32	1022563			
S=31,41		R-Sq=%98,07		R-Sq(adj)=%96,91	

Tablo 3. En Kısa Yol Algoritmasının ANOVA Sonuçları

Çift Yönlü ANOVA: Toplam Yol - Araç Kapasitesi; Müşteri Sayısı					
	DF	SS	MS	F	P
Araç Kapasitesi	2	87069	43534,6	16,83	0,000
Müşteri Sayısı	10	609110	60911,0	23,55	0,000
Hata	20	51726	2586,3		
Toplam	32	747906			
S=50,86		R-Sq=%93,08		R-Sq(adj)=%88,93	

Tablo 4. Melez Algoritmanın ANOVA Sonuçları

Çift Yönlü ANOVA: Toplam Yol - Araç Kapasitesi; Müşteri Sayısı					
	DF	SS	MS	F	P
Araç Kapasitesi	2	80111	40055,5	18,24	0,000
Müşteri Sayısı	10	720230	72023,0	32,79	0,000
Hata	20	43923	2196,2		
Toplam	32	844264			
S=46,86		R-Sq=%94,80		R-Sq(adj)=%91,68	

daki p değerleri 0 olarak görülmektedir. H_0 hipotezi, $\alpha=0,05$ ve $\alpha=0,01$ anlamlılık düzeyinde $p < \alpha$ olduğu için reddedilir. Bu sonuçlara göre, tüm faktörlerin toplam yol üzerinde etkisi olduğu görülmektedir. Tablo 1'deki en kısa yol algoritmasına ait verilere göre Anova testi uygulandığında sonuçlar, Tablo 3'teki gibi bulunmuştur:

Bu çalışmada;

H_0 : Faktörlerin toplam yol üzerinde etkisi yoktur
→ $\mu_1 = \mu_2 = \mu_3 = \mu_4$ ve

H_1 : Faktörlerin toplam yol üzerinde etkisi vardır
→ En az iki $\mu_i \neq \mu_j, i \neq j$

olarak hipotezler tanımlanmıştır. Anova tablosundaki p değerleri, Clarke ve Wright tasarruf algoritmasında olduğu gibi, 0 olarak görülmektedir. H_0 hipotezi $\alpha=0,05$ ve $\alpha=0,01$ anlamlılık düzeyinde $p < \alpha$ olduğu için reddedilir. Bu sonuçlara göre, tüm faktörlerin toplam yol üzerinde etkisi olduğu görülmektedir.

Tablo 1'de verilen yeni geliştirilmiş melez algoritmaya ait verilere göre Anova testi uygulandığında elde edilen sonuçlar Tablo 4'te görülmektedir:

Bu çalışmada;

H_0 : Faktörlerin toplam yol üzerinde etkisi yoktur
→ $\mu_1 = \mu_2 = \mu_3 = \mu_4$ ve

H_1 : Faktörlerin toplam yol üzerinde etkisi vardır
→ En az iki $\mu_i \neq \mu_j, i \neq j$

olarak hipotezler tanımlanmıştır. Anova tablosundaki p değerleri, Clarke ve Wright tasarruf algoritması ve en kısa yol yönteminde de olduğu gibi, 0 olarak görülmektedir. H_0 hipotezi $\alpha=0,05$ ve $\alpha=0,01$ anlamlılık düzeyinde $p < \alpha$ olduğu için reddedilir. Bu sonuçlara göre tüm faktörlerin toplam yol üzerinde etkisi olduğu görülmektedir.

Anova testini, Clarke ve Wright tasarruf algoritması, en kısa yol yöntemi ve yeni geliştirilen melez algoritma dikkate alarak yapıldığında sonuçlar, Tablo 5'te görüldüğü gibi elde edilmiştir.

Tablo 5'e bakıldığında, algoritma tipi, müşteri sayısı ve araç kapasitesi faktörlerinin p değerleri 0 olarak görülmektedir. Bunun anlamı ise her üç faktöründe toplam yol üzerinde etkisi olduğunu göstermektedir.

Tablo 6'da ise algoritma tiplerinin birbirleriyle kıyası görülmektedir. Algoritma tiplerinden 1, Clarke ve Wright tasarruf algoritmasını; 2, en kısa yol yöntemini; 3 ise yeni geliştirilen melez algoritmayı temsil etmektedir. Tukey testinde algoritma 1, 2 ve 3'ün ortalama toplam yol uzunlukları karşılaştırılmıştır.

Tablo 5. Algoritmaların ANOVA Sonuçları

Doğrusal Model: Toplam Yol - Algoritma Ti, Araç Kapasitesi, Müşteri Sayısı						
Faktörler	Tipi	Seviyeler	Değerler			
Algoritma Tipi	Sabit	3	1;2;3			
Araç Kapasitesi	Sabit	11	10;11;12;13;14;15;16;17;18;19;20			
Müşteri Sayısı	Sabit	3	200;250;300			
Toplam Yol için ANOVA testi						
	DF	Seq SS	Adj SS	Adj MS	F	P
Algoritma Tipi	2	48568	48568	24284	12,63	0,000
Araç Kapasitesi	10	2273627	2273627	227363	118,25	0,000
Müşteri Sayısı	2	224821	224821	112410	58,46	0,000
Hata	84	161510	161510	1923		
Toplam	98	2708526				
S=43,8491		R-Sq=%94,04		R-Sq(adj)=%93,04		

Tablo 6. Algoritmaların Karşılaştırılması

%95 Güven Aralığında Tukey Testi				
Algoritma Tipi=1				
Algoritma Tipi	Alt	Orta	Üst	
2	-74,74	-49,02	-23,29	
3	-70,38	-44,65	-18,93	
Algoritma Tipi=2				
Algoritma Tipi	Alt	Orta	Üst	
3	-21,36	4,364	30,09	

Tukey testinde P değerinin "0" olarak bulunması, üç algoritma tipinin ortalama toplam mesafelerinin birbirinden farklı olduğunu göstermektedir. Tukey testinde verilen her üç algoritmanın toplam yol uzunluklarının farkının %95'lik güven aralıkları incelendiğinde, %95 güvenle 2'nci ve 3'üncü algoritmanın toplam yol uzunluğu ile 1'nci algoritmanın yol uzunluğu farkı her zaman negatiftir. Buna göre, %95 güvenle 1'nci algoritmanın toplam yol uzunluğu, 2'nci ve 3'üncü algoritmanın toplam yol uzunluğundan fazladır. %95 güvenle 3'üncü algoritmanın toplam yol uzunluğu, 2'nci algoritmanın yol uzunluğu farkı her zaman negatiftir. Buna göre, %95 güvenle 2'nci algoritmanın toplam yol uzunluğu 3'üncü algoritmanın toplam yol uzunluğundan fazladır. Bu sonuca göre de yeni geliştirilen melez algoritmayı seçmek daha avantajlı olacaktır, çünkü araç rotalama problemlerinde asıl amaçlardan biri toplam kat edilen mesafeyi minimum yapmaktır.

5.2 Regresyon Analizi

Regresyon analizi, aralarında sebep-sonuç ilişkisi

bulunan iki veya daha fazla değişken arasındaki ilişkiyi belirlemek ve bu ilişkiyi kullanarak o konu ile ilgili tahminler ya da kestirimler yapabilmek amacıyla kullanılır (<http://turkistatistik.net/upload/dosya/reganaliz.pdf>).

Bu çalışmada regresyon analizi yapılmasının amacı, müşteri sayısı ve araç kapasitesi faktörlerinin toplam yol üzerinde etkisi olup olmadığının ve eğer faktörlerin etkisi var ise bunun büyüklüğünün olumlu/olumsuz olduğunun belirlenmesidir.

Clarke ve Wright tasarruf algoritması için regresyon analizi Tablo 7'de verilmiştir.

Veriler incelendiğinde müşteri sayısı ve araç kapasitesinin p değerleri 0 çıkmıştır. Bu, iki faktöründe toplam yol üzerinde etkili olduğunu gösterir. Regresyon denklemine göre, müşteri sayısının toplam yol üzerinde olumsuz ve araç kapasitesinin ise olumlu bir etkisinin olduğunu görüyoruz.

En kısa yol yöntemi için regresyon analizi Tablo 8'de verilmiştir.

Tablo 7. Tasarruf Algoritması için Regresyon Analizi Sonuçları

Regresyon Analizi: Toplam Yol-Müşteri Sayısı; Araç Kapasitesi				
Toplam Yol=315+53,0 Müşteri Sayısı – 0,913 Araç Kapasitesi				
Bağımsız Değişken	Coef	SE Coef	T	P
Sabit	315,07	56,12	5,61	0,000
Müşteri Sayısı	52,961	2,272	23,31	0,000
Araç Kapasitesi	-0,9132	0,1760	-5,19	0,000
S=41,2740		R-Sq=%95,0		R-Sq(adj)=%94,7

Tablo 8. En Kısa Yol Yöntemi İçin Regresyon Analizi Sonuçları

Regresyon Analizi Toplam Yol-Müşteri Sayısı; Araç Kapasitesi				
Toplam Yol=512+42,0 Müşteri Sayısı – 1,26 Araç Kapasitesi				
Bağımsız Değişken	Coef	SE Coef	T	P
Sabit	512,39	69,31	7,39	0,000
Müşteri Sayısı	42,027	2,806	14,98	0,000
Araç Kapasitesi	-1,2582	0,2174	-5,79	0,000
S=50,9781		R-Sq=%89,6		R-Sq(adj)=%88,9

Sonuç tablosuna bakıldığında, müşteri sayısı ve araç kapasitesinin p değerleri, Clarke ve Wright tasarruf algoritmasındaki gibi 0 çıkmıştır. Bu iki faktörün de toplam yol üzerinde etkili olduğunu gösterir. Regresyon denklemine göre, yine Clarke ve Wright tasarruf algoritmasında olduğu gibi müşteri sayısının toplam yol üzerinde olumsuz araç kapasitesinin ise olumlu bir etkisinin olduğunu görüyoruz.

Yeni geliştirilen melez algoritma için regresyon analizi Tablo 9'da verilmiştir.

Sonuç tablosu incelendiğinde, müşteri sayısı ve araç kapasitesinin p değerleri, Clarke ve Wright tasarruf algoritması ve en kısa yol yöntemindeki gibi, 0 çıkmıştır. Bu, iki faktöründe toplam yol üzerinde etkili olduğunu gösterir. Regresyon denklemine göre, müşteri sayısının toplam yol üzerinde olumsuz, araç kapasitesinin ise olumlu bir etkisinin olduğu görülmektedir (Tablo 10).

Tablo 10'da görüldüğü gibi, üç yöntemde de müşteri sayısının negatif, araç kapasitesinin ise pozitif bir etkisinin olduğu anlaşılmaktadır.

Tablo 9. Melez Algoritma için Regresyon Analizi

Regresyon Analizi Toplam Yol-Müşteri Sayısı; Araç Kapasitesi				
Toplam Yol=428+47,0 Müşteri Sayısı – 1,24 Araç Kapasitesi				
Bağımsız Değişken	Coef	SE Coef	T	P
Sabit	428,14	71,58	5,98	0,000
Müşteri Sayısı	46,976	2,898	16,21	0,000
Araç Kapasitesi	-1,2359	0,2245	-5,51	0,000
S=52,6491		R-Sq=%90,7		R-Sq(adj)=%90,1

Tablo10. Regresyon Sonuçlarının Özeti

Metot	Regresyon Denklemi	Müşteri Sayısı	Araç Kapasitesi
Clarke ve Wright Tasarruf Algoritması Metodu	315+53 müşteri sayısı-0,913 araç kapasitesi	Negatif	Pozitif
En Kısa Yol Yöntemi	512+42 müşteri sayısı-1,26 araç kapasitesi	Negatif	Pozitif
Melez Algoritma	428+47 müşteri sayısı-1,24 araç kapasitesi	Negatif	Pozitif

Modellerin kurulması aşamasında doğrusal ve doğrusal olmayan modeller denenmiştir. Doğrusal modelin R-sq (adj) değeri, tasarruf algoritma için %94,7, en kısa yol yöntemi için %88,9 ve melez algoritma için de %90,1 olduğu görülmüştür. Bu değerler, kurulan modelin parametrelerinin olayını yeteri düzeyde açıklayabildiği görülmektedir. Aynı değerler, doğrusal olmayan modeller üzerinde denenmiş, fakat daha kötü R-sq(adj) değerler elde edildiği görülmüştür. Bu nedenle, makalede olayın açıklanabilmesi için doğrusal model tercih edilmiştir.

6. SONUÇ

Küresel dünyanın rekabet koşullarına ayak uydurabilmesi için firmaların, gelişen üretim ve hizmet teknolojilerine uyumlu bir şekilde üretilen hizmet ve ürünleri talep noktalarına ulaştırırken, aynı zamanda hem müşteri memnuniyetini en üst seviyede tutması hem de taşıma maliyetlerini ve kullanılan zamanı en aza indirmesi gereklidir. Bunun için, pazarda lider konumuna ulaşmak isteyen işletmeler, uygun lojistik planları geliştirmek zorundadır (Darcan, 2007).

Araç Rotalama Problemi; müşteri, mesafe, zaman, kapasite gibi kısıtlar da göz önüne alınarak talepteki değişiklikler, trafik koşulları, kapasite aşılması gibi değişen koşullara ayak uydurabilen ve hızlı bir şekilde optimize edilebilen rota planlarının oluşturulması ile çözülerek işletmelere pazarda söz sahibi olma imkânı vermektedir.

Bu çalışmada, öncelikle 10 ile 20 müşteri arasında farklı boyutlardaki talep noktalarına sahip problem setleri Clarke-Wright sezgisel algoritması ile çözülmüştür. Çözüm sonucunda, rotalar oluşturulmuş ve toplam yollar hesaplanmıştır.

İkinci adımda, aynı problem setleri en kısa yol yöntemiyle çözülmüştür. Yine, aynı şekilde rotalar oluşturulmuş ve toplam yollar hesaplanmıştır. Bu çalışmada, Clarke-Wright sezgisel algoritması ve en kısa yol yöntemi dikkate alınarak yeni bir melez algoritma geliştirilmiştir. Aynı problem setleri yeni geliştirilen algoritmayla da çözülerek rotalar oluşturulmuş ve toplam yollar hesaplanmıştır.

Üç algoritmayla da elde edilen sonuçlar, Anova testiyle değerlendirilmiştir. Bu değerlendirme sonucunda geliştirilen yeni algoritmanın her iki yönetime göre de daha iyi sonuç verdiği gözlemlenmiştir. Ayrıca, her üç algoritma ile elde edilen sonuçlar dikkate alınarak müşteri sayısı ve araç kapasitesi faktörlerine göre regresyon denklemleri çıkarılmıştır. Denklemler, bir iki parametrenin problemin çözümü olan en kısa yol değerini nasıl etkilediği keşfedilmeye çalışılmıştır.

KAYNAKÇA

- Aksen, D., Özyurt, Z., Aras, N.** 2007. "The Open Vehicle Routing Problem with Driver Nodes and Time Dead Lines," *Journal of the Operational Research Society*, vol. 58, no. 9, p. 1223-1234.
- Alba, E., Dorronsoro, B.** 2005. "Computing Nine New Best-So-Far Solutions for Capacitated VRP with a Cellular Genetic Algorithm," *Information Processing Letters*, vol. 98, p. 225-230.
- Arslan, S.** 2007. "Araç Rotalama Problemi ve Bir Uygulama," Yüksek Lisans Tezi, Gazi Üniversitesi, Sosyal Bilimler Enstitüsü, Ankara.
- Aydemir, E.** 2006. "Esnek Zaman Pencereci Araç Rotalama Problemi ve Bir Uygulama," Yüksek Lisans Tezi, Gazi Üniversitesi, Fen Bilimleri Enstitüsü, Ankara.
- Baker, B. M., Ayechev, M. A.** 2003. "A Genetic Algorithm for the Vehicle Routing Problem," *Computers & Operations Research*, vol. 30, p. 787-800.
- Brandão, J.** 2004. "A Tabu Search Heuristic Algorithm for Open Vehicle Routing Problem," *European Journal of Operational Research*, vol. 157, p. 552-564.
- Christofides, N., Mingozi, A., Toth, P.** 1981a. "Exact Algorithms for the Vehicle Routing Problem based on Spanning Trees and Shortest Path Relaxations," *Mathematical Programming*, vol. 20, no. 1, p. 255-282.
- Christofides, N., Mingozi, A., Toth, P.** 1981b. "State-Space Relaxation Procedures for the Computation of Bounds to Routing Problems," *Networks*, vol. 11, no. 2, p. 145-164.
- Darcan, U.** 2007. "Stokastik Araç Rotalama Algoritmalarının Karşılaştırmalı İncelenmesi," Yüksek Lisans Tezi, Yıldız Teknik Üniversitesi, Fen Bilimleri Enstitüsü, İstanbul.
- Demiral, M. F.** 2008. "Servis Araçlarının Rotalanmasında Optimizasyon ve Bir Uygulama," Yüksek Lisans Tezi, Süleyman Demirel Üniversitesi, Sosyal Bilimler Enstitüsü, Isparta.

- Demircioğlu, M.** 2009. "Araç Rotalama Probleminin Sezgisel Bir Yaklaşım İle Çözülmesi Üzerine Bir Uygulama," Doktora Tezi, Çukurova Üniversitesi, Sosyal Bilimler Enstitüsü, Adana.
- Doçur, T.** 2008. "Enhancements of Clarke-Wright Savings Heuristics For The Capacitated Vehicle Routing Problem," Yüksek Lisans Tezi, Sabancı Üniversitesi, Fen Bilimleri Enstitüsü, İstanbul.
- Erol, V.** 2006. "Araç Rotalama Problemleri İçin Popülasyon ve Komşuluk Tabanlı Metasezgisel Bir Algoritmanın Tasarımı ve Uygulaması," Yüksek Lisans Tezi, Yıldız Teknik Üniversitesi, Fen Bilimleri Enstitüsü, İstanbul.
- Eryavuz, M., Gencer, C.** 2001. "Araç Rotalama Problemine Ait Bir Uygulama," Süleyman Demirel Üniversitesi İktisadi ve İdari Bilimler Fakültesi, C. 6, no. 1, s. 139-155.
- Fukasawa, R., Longo, H., Lysgaard, J., Poggi de Aragao, M., Reis, M., Uchoa, E., Werneck R. F.** 2006. "Robust Branch-and-Cut-and-Price for the Capacitated Vehicle Routing Problem," *Mathematical Prog. Series A*, vol. 106, p. 491-511.
- Fu, Z., Eglese, R., Li, L. Y. O.** 2005. "A New Tabu Search Algorithm for Open Vehicle Routing Problem," *Journal of the Operational Research Society*, vol. 56, p. 267-274.
- Gambardella, L. M., Taillard, E., Agazzi, G.** 1999. "MACS-VRPTW: A Multiple Ant Colony System for Vehicle Routing Problems with Time Windows," *New Ideas in Optimization*, eds: Corne, D., Dorigo, M. and Glover, F., McGraw-Hill, London, UK, p. 63-76.
- Gendreau, M., Hertz, A., Laporte, G.** 1994. "A Tabu Search Heuristic for the Vehicle Routing Problem," *Management Science*, vol. 40, p. 1276-1290.
- Gerdan, O.** 2007. "Müşteriler Arası Malzeme Akışı Eş Zamanlı Dağıtım Toplama Yapılan Araç Rotalama Problemi ve Sezgisel Çözümü," Doktora Tezi, Gazi Üniversitesi, Fen Bilimleri Enstitüsü, Ankara.
- Girard, S., Renaud, J., Boctor, F. F.** 2005. "A Simple and Efficient Perturbation Heuristic to Solve the Vehicle Routing Problem," <https://www.cirrelt.ca/Documents/Travail/2005/DT-2005-JR-1.pdf>, son erişim tarihi: 08.06.2014.
- Gonzalez, E. L., Fernandez, M. A. R.** 2000. "Genetic Optimization of a Fuzzy Distribution Model," *International Journal of Physical Distribution & Logistics Management*, vol. 30, no. 7/8, p. 681-696.
- İşleyen, S. K.** 2008. "Lojistik Yönetim Sistemlerinde Stokastik Talepli Araç Rotalama Problemi," Doktora Tezi, Gazi Üniversitesi, Fen Bilimleri Enstitüsü, Ankara.
- Jeon, G., Leep, H. R., Shim, J. Y.** 2007. "A Vehicle Routing Problem Solved by Using a Hybrid Genetic Algo-

rithm," *Computers and Industrial Engineering*, vol. 53, no. 4, p. 680-692.

- Kelly, J., Xu, J. P.** 1996. "A Network Flow-Based Tabu Search Heuristic for the Vehicle Routing Problem," *Transportation Science*, vol. 30, p. 379-393.
- Laporte, G.** 2007. "What You Should Know about the Vehicle Routing Problem," *Naval Research Logistics*, vol. 54, no. 8, p. 811-819.
- Laporte, G., Nobert, Y., Desrochers, M.** 1985. "Optimal Routing Under Capacity and Distance Restrictions," *Operations Research*, vol. 33, p. 1058-1073.
- Liu, F., Shen, S.** 1999. "A Method for Vehicle Routing Problem with Multiple Vehicle Types and Time Windows," *Proc. Natl. Sci. Coun. ROC (A)*, vol. 23, no. 4, p. 526-536.
- Prins, C.** 2004. "A Simple and Effective Evolutionary Algorithm for the Vehicle Routing Problem," *Computers & Operations Research*, vol. 31, p. 1985-2002.
- Reinmann, M., Doerner, K., Hartl, R. F.** 2004. "D-ANTS: Savings Based Ants Divide and Conquer The Vehicle Routing Problems," *Computers and Operations Research*, vol. 31, no. 4, p. 563-91.
- Rochat, Y., Taillard, É. D.** 1995. "Probabilistic Diversification and Intensification in Local Search for Vehicle Routing," *Journal of Heuristics*, vol. 1, p. 147-167.
- Şahin, M., Şahin, G., Çavuşlar, G., Özcan, T., Tüzün, D.** 2010. "Parçalanabilir Yüklü Birebir Toplama ve Dağıtım Problemi İçin Tabu Algoritması," *Yöneylem Araştırması ve Endüstri Mühendisliği 30. Ulusal Kongresi*, Sabancı Üniversitesi, İstanbul.
- Şeker, Ş.** 2007. "Araç Rotalama Problemleri Ve Zaman Pencereci Stokastik Araç Rotalama Problemine Genetik Algoritma Yaklaşımı," Yüksek Lisans Tezi, Yıldız Teknik Üniversitesi, Fen Bilimleri Enstitüsü, İstanbul.
- Taillard, É. D.** 1993. "Parallel Iterative Search Methods for Vehicle Routing Problem," *Networks*, vol. 23, p. 661-673.
- Tokaylı, M. A.** 2005. "Zaman Pencereci Araç Rotalama Problemi İçin Bir Karar Destek Sistemi," Yüksek Lisans Tezi, Gazi Üniversitesi, Fen Bilimleri Enstitüsü, Ankara.
- Toth, P., Vigo, D.** 2002. "The Vehicle Routing Problem," *SIAM*, Philadelphia.
- Tüfekçier, H.** 2008. "İki Amaçlı Açık Araç Rotalama Problemi İçin Bir Çözüm Yaklaşımı," Yüksek Lisans Tezi, Eskişehir Osmangazi Üniversitesi, Fen Bilimleri Enstitüsü, Eskişehir.
- Yılmaz, Ş.** 2008. "Çok Depolu Araç Rotalama Probleminin Karınca Kolonisi Optimizasyonu İle Modellenmesi ve Bir Çözüm Önerisi," Yüksek Lisans Tezi, Yıldız Teknik Üniversitesi, Fen Bilimleri Enstitüsü, İstanbul.
- <http://turkistatistik.net/upload/dosya/reganaliz.pdf>, son erişim tarihi: 08.06.2014.

Ek 1. Talepler ve Uzaktık Tablosu (Müşteri sayısı 20)

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
Müşteri	50	70	50	60	70	40	70	80	80	80	30	80	30	60	60	10	20	10	20	30
Talep	50	70	50	60	70	40	70	80	80	80	30	80	30	60	60	10	20	10	20	30
0	0	52	35	48,5	76	38,5	29	52	91,5	75	66,5	53	93,5	59	81,5	68,5	41,5	91	84,5	65,5
1	0	61	55	48	68	34,5	81	87	31	41	62	63,5	85,5	80	76,5	55,5	57	85,5	66,5	70,5
2	0	0	14,5	44	29,5	47	70,5	34,5	38,5	52	77,5	66,5	53	98	92	83	55,5	53	56	66
3	0	0	0	66,5	30	43,5	60,5	68	70	45,5	69	60	47	69,5	69	73,5	65,5	37	52	64
4	0	0	0	0	52	61	50	70,5	44,5	42	59	62,5	30	57	56,5	49,5	79	70,5	62,5	66
5	0	0	0	0	0	56	54,5	49,5	33,5	68	50,5	39	73,5	64,5	68,5	102	69	71,5	77	51,5
6	0	0	0	0	0	0	36,5	30	57,5	60,5	61,5	32	77	56	32	64,5	47	58	84	49,5
7	0	0	0	0	0	0	0	30,5	34	46,5	74	48,5	67	85	33	64	47,5	83	78	67
8	0	0	0	0	0	0	0	0	32	49,5	67	28,5	84	100,5	42	76,5	56,5	79,5	61,5	60,5
9	0	0	0	0	0	0	0	0	0	36,5	67	34	60,5	58,5	40	64	54	30,5	53,5	64
10	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	80	29,5	53	62	49,5	64	59,5	34,5	61	74,5
11	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	53	76	61,5	80	59,5	49	33,5	23	89
12	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	56	56,5	73	54	19,5	55	102	88,5
13	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	75,5	99,5	55,5	35	48	32,5	60,5
14	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	26,5	45	64	37	71	50
15	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	84,5	61,5	53,5	41	44
16	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	64	48,5	86	56,5
17	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	28,5	70	65
18	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	78,7	35,5
19	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	5	20,5
20	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0